

**В. А. РОЖАНСКИЙ**

# Теория ПЛАЗМЫ

*Рекомендовано  
УМО по университетскому  
политехническому образованию  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки  
магистров «Техническая физика»*



ЛАНЬ®  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ ·  
МОСКВА ·  
КРАСНОДАР ·  
2012

ББК 22.333я73

Р 62

**Рожанский В. А.**

**Р 62** Теория плазмы: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань». — 2012. — 320 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1233-4**

Учебное пособие содержит изложение вопросов кинетики, динамики и равновесия плазмы, а также процессов переноса в ней. Данный курс отличается от большинства курсов лекций по физике плазмы тем, что в нем описываются явления как в полностью ионизованной плазме, так и в частично ионизованной.

Пособие предназначено для студентов технических вузов, обучающихся по направлению подготовки «Ядерные физика и технология», а также студентов, изучающих управляемый термоядерный синтез, физику газовых разрядов и другие области низкотемпературной плазмы, физику ионосферы, физику космической плазмы и т. д.

**Рецензент:**

*Д. Х. МОРОЗОВ* — доктор физико-математических наук, начальник лаборатории теории турбулентной плазмы Института физики токамаков НИЦ «Курчатовский институт».

**ББК 22.333я73**

---

Зав. редакцией физико-математической литературы *К. Е. Житков*

Ответственный редактор *О. А. Шаповалова*

Художественный редактор *С. Ю. Малахов*

Редактор *Т. В. Ананченко*

Корректоры *Т. А. Брылева, А. М. Плетнева*

Верстка *М. И. Хетерели*

Выпускающие *М. В. Тучина, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10

от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

---

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2012

© В. А. Рожанский, 2012

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2012

## ВВЕДЕНИЕ

**К**урс лекций «Теория плазмы» читается в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете с 1989 г. для студентов специальности «Физика плазмы». Предполагается первоначальное знакомство с основами физики плазмы в рамках курсов «Введение в специальность», «Основы физики плазмы» и «Элементарные процессы в плазме». Курс лекций рассчитан на два семестра и содержит изложение кинетики плазмы и процессов переноса (в первом семестре) и вопросов динамики и равновесия плазмы (во втором семестре). Вопросы распространения волн в плазме систематически рассматриваются на кафедре физики плазмы отдельно, поэтому в данном курсе рассмотрены только те низкочастотные волны и неустойчивости плазмы, которые тесно связаны с ее динамикой и процессами переноса в ней: ионно-звуковые, МГД и дрейфовые волны. Данный курс отличается от большинства курсов лекций по физике плазмы тем, что в нем излагаются явления как в полностью ионизованной плазме, так и в частично ионизованной. Поэтому он может быть полезен широкому кругу специалистов, работающих в области управляемого термоядерного синтеза, физики газовых разрядов и других областей низкотемпературной плазмы, физики ионосферы, физики космической плазмы и т. д. В списке литературы приведены в основном ссылки на русскоязычную литературу, где рассмотрены те или иные вопросы данного курса.

Автор признателен Е. Г. Кавеевой и И. Ю. Сениченкову за ценные замечания и И. Ф. Рожанской за помощь в подготовке рукописи к печати.

# Глава 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

## 1.1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

**С**остояние плазмы в общем случае описывается набором функций распределения  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{V}, t)$  для входящих в нее компонент. Функция распределения имеет смысл плотности частиц в шестимерном фазовом пространстве координат и скоростей, а величина  $dn_\alpha(\vec{r}, \vec{V}, t) = f_\alpha d\vec{r}d\vec{V}$  представляет собой число частиц в элементе фазового объема. Индекс  $\alpha$  может нумеровать как различные частицы, так и различные квантовые состояния молекул, ионов или атомов. Ниже рассматривается классическая идеальная нерелятивистская плазма. Изменение числа частиц в элементе шестимерного фазового объема в отсутствие столкновений связано с перетеканием «фазовой жидкости» в соседние области фазового пространства и описывается шестимерным уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial x_i} (f_\alpha \dot{x}_i) = 0.$$

В фазовом пространстве «координатами»  $x_i$  являются 3 пространственные координаты  $r_i$  и 3 компоненты скорости  $V_i$ , а «скоростями»  $\dot{x}_i$  соответственно 3 компоненты скорости  $V_i$  и ускорения  $\dot{V}_i$ . Таким образом, уравнение непрерывности в фазовом пространстве имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} (f_\alpha V_i) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial V_i} (f_\alpha \dot{V}_i) = 0.$$

Второй член в левой части представляет собой дивергенцию потока в координатном пространстве, а третий —

дивергенцию потока в пространстве скоростей. Ускорение  $\dot{V}_i$  связано с внешними силами, действующими на частицу. В плазме

$$\dot{V} = \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \right) + \vec{g},$$

где  $Z_\alpha$  — зарядовое число;  $m_\alpha$  — масса;  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — напряженность электрического и магнитного полей соответственно;  $m_\alpha \vec{g}$  — сила тяжести. Координаты и скорости являются независимыми переменными, поэтому  $\partial V_i / \partial r_i = 0$ . Так как сила Лоренца перпендикулярна скорости, то также и  $\partial \dot{V}_i / \partial V_i = 0$  и уравнение непрерывности приводится к виду

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \dot{V} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} = 0 \quad (1.1)$$

или

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} + \vec{g} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} = 0. \quad (1.2)$$

Это уравнение известно как уравнение Власова.

Уравнение Власова может быть записано для любых обобщенных координат и импульсов  $q_i$  и  $p_i$ . При этом уравнение Власова вида (1.1) получается из уравнения непрерывности в фазовом пространстве с учетом соотношения  $\partial \dot{q}_i / \partial q_i + \partial \dot{p}_i / \partial p_i = 0$ , которое следует из уравнения Гамильтона:  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ ;  $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$ .

Левая часть уравнения Власова представляет собой полную производную  $df_\alpha / dt$ . Поэтому в стационарном случае, в соответствии с теоремой Лиувилля, функция распределения постоянна вдоль фазовой траектории частицы. Отсюда следует утверждение, что в бесстолкновительном случае стационарная функция распределения есть функция интегралов движения.

Учет столкновений изменяет уравнения (1.1), (1.2) так как функция распределения перестает быть постоянной вдоль фазовых траекторий, — при столкновениях меняются скорости сталкивающихся частиц, а также их внутреннее и зарядовое состояния. Кинетическое уравнение в общем случае может быть записано в виде

$$\frac{df_\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} + \vec{g} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} = S t_\alpha, \quad (1.3)$$

где столкновительный член  $St_\alpha$  описывает скорость изменения функции распределения за счет столкновений. Уравнение (1.3) называют кинетическим уравнением, или уравнением Больцмана. Столкновительный член представляет собой сумму

$$St_\alpha = \sum_{\beta} St_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta), \quad (1.4)$$

каждое слагаемое которой соответствует столкновениям частиц данного сорта  $\alpha$  с частицами всех остальных сортов, в том числе с частицами сорта  $\alpha$ .

Рассмотрим случай упругих столкновений, когда внутреннее состояние сталкивающихся частиц не изменяются при ударе. Будем считать, что в результате акта столкновения двух частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$  их координаты не изменяются, а скорости до столкновения  $\vec{V}_\alpha$  и  $\vec{V}_\beta$  изменяются на значения  $\vec{V}'_\alpha$  и  $\vec{V}'_\beta$  после столкновения. Каждое столкновение частицы со скоростью  $\vec{V}_\alpha$  приводит к ее уходу из элемента объема в пространстве скоростей  $d\vec{V}_\alpha$ . Полное число таких уходов при всех возможных столкновениях с частицами сорта  $\beta$  с переходами  $\vec{V}_\alpha, \vec{V}_\beta \rightarrow \vec{V}'_\alpha, \vec{V}'_\beta$ , происходящих в единицу времени в единице объема при фиксированном значении  $\vec{V}_\alpha$ , дается выражением

$$dQ_{\alpha\beta}^- = d\vec{r} d\vec{V}_\alpha \int \int_{\vec{V}_\beta} f_\alpha(\vec{V}_\alpha) f_\beta(\vec{V}_\beta) (d\sigma_{\alpha\beta} / d\Omega) |\vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta| d\Omega d\vec{V}_\beta,$$

где  $d\sigma_{\alpha\beta} / d\Omega$  — дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол  $\Omega$ . Кроме ухода существует также и приход в элемент объема пространства скоростей  $d\vec{V}_\alpha$  в результате столкновений с переходами  $\vec{V}'_\alpha, \vec{V}'_\beta \rightarrow \vec{V}_\alpha, \vec{V}_\beta$ :

$$dQ_{\alpha\beta}^+ = d\vec{r} \int \int_{\vec{V}'_\alpha} \int_{\vec{V}'_\beta} f_\alpha(\vec{V}'_\alpha) f_\beta(\vec{V}'_\beta) (d\sigma_{\alpha\beta} / d\Omega) |\vec{V}'_\alpha - \vec{V}'_\beta| d\Omega d\vec{V}'_\alpha d\vec{V}'_\beta.$$

Скорости  $\vec{V}'_\alpha$  и  $\vec{V}'_\beta$  при интегрировании не являются независимыми, а связаны законами сохранения — при столкновении частиц со скоростями  $\vec{V}'_\alpha, \vec{V}'_\beta$  частица сорта  $\alpha$  должна получить скорость  $\vec{V}_\alpha$ . Перейдем в этом интеграле к переменным  $\vec{V}_\alpha, \vec{V}_\beta$ , используя тот факт, что относительная скорость при столкновениях сохраняется:  $|\vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta| = |\vec{V}'_\alpha - \vec{V}'_\beta|$ . Якобиан такого преобразования, как из-

вестно из механики, равен единице:  $d\vec{V}'_\alpha d\vec{V}'_\beta = d\vec{V}_\alpha d\vec{V}_\beta$ . Учитывая, что интегрирование по  $d\vec{V}_\alpha$  производится только вблизи данного значения  $\vec{V}_\alpha$ , получаем

$$dQ_{\alpha\beta}^+ = d\vec{r} d\vec{V}_\alpha \int \int_{\vec{V}_\beta, \Omega} f_\alpha(\vec{V}'_\alpha) f_\beta(\vec{V}'_\beta) (d\sigma_{\alpha\beta} / d\Omega) \left| \vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta \right| d\Omega d\vec{V}_\beta.$$

Объединяя выражения для прихода и ухода, получаем для столкновительного члена

$$St_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \int \int_{\vec{V}_\beta, \Omega} (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) (d\sigma_{\alpha\beta} / d\Omega) \left| \vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta \right| d\Omega d\vec{V}_\beta, \quad (1.5)$$

где  $f'_\alpha \equiv f'_\alpha(\vec{V}'_\alpha)$ ,  $f'_\beta \equiv f'_\beta(\vec{V}'_\beta)$ . Выражение (1.5) представляет собой больцмановский вид интеграла столкновений.

Кинетическое уравнение Больцмана (1.3) является, таким образом, интегро-дифференциальным уравнением, включающим в себя функции распределения всех сталкивающихся частиц. Поэтому в общем случае должна решаться система зацепляющихся уравнений для всех функций распределения. При выводе кинетического уравнения предполагалось, что столкновение имеет точечный характер, при котором мгновенно меняются скорости частиц, но не их координаты. Это предположение оправданно, если средняя потенциальная энергия взаимодействия двух частиц в плазме меньше их средней энергии хаотического движения  $T$ . Для заряженных частиц средняя потенциальная энергия взаимодействия есть  $Z_\alpha Z_\beta e^2 / \langle r_{\alpha\beta} \rangle$ , а среднее расстояние между частицами  $\langle r_{\alpha\beta} \rangle$  — порядка  $n^{-1/3}$ , где  $n$  — концентрация плазмы. Поэтому критерий применимости имеет вид

$$Z_\alpha Z_\beta e^2 n^{1/3} / T \ll 1,$$

т. е. плазма должна быть достаточно горячей и не слишком плотной.

Интеграл неупругих столкновений может быть построен аналогичным образом. В общем виде он редко используется, как правило, практически анализируются только некоторые неупругие процессы — возбуждение, ионизация, рекомбинация, причем используются соответствующие интегралы по скоростям, выражения для которых проще получить непосредственно.

Для описания усредненных характеристик используют моменты функции распределения:

$$M_{\alpha j, k \dots n} = \int V_j V_k \dots V_n f_\alpha(\vec{r}, \vec{V}, t) d\vec{V}. \quad (1.6)$$

Ниже приведены наиболее важные из них. Концентрация частиц:

$$n_\alpha = \int f_\alpha d\vec{V}. \quad (1.7)$$

Плотность потока частиц дается выражением

$$\vec{\Gamma}_\alpha = n_\alpha \vec{u}_\alpha = \int \vec{V} f_\alpha d\vec{V}, \quad (1.8)$$

где  $\vec{u}_\alpha$  — направленная скорость.

Средняя энергия хаотического движения (для одноатомных частиц):

$$\frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha = \int \frac{m_\alpha (\vec{V} - \vec{u}_\alpha)^2}{2} f_\alpha d\vec{V}, \quad (1.9)$$

где величина  $T_\alpha$  называется температурой.

Плотность потока тепла:

$$\vec{q}_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int (\vec{V} - \vec{u}_\alpha)^2 (\vec{V} - \vec{u}_\alpha) f_\alpha d\vec{V}. \quad (1.10)$$

Частые столкновения частиц стремятся установить локально максвелловскую функцию распределения:

$$f_\alpha^M = \frac{n_\alpha}{(2\pi T_\alpha / m_\alpha)^{3/2}} \exp\left[-\frac{m_\alpha (\vec{V} - \vec{u}_\alpha)^2}{2T_\alpha}\right]. \quad (1.11)$$

В отсутствие внешних сил в однородной плазме в стационарном состоянии кинетическое уравнение (1.3) сводится к условию  $St_\alpha = 0$ . Нетрудно убедиться, что максвелловские функции распределения с общей температурой и направленной скоростью обращают в ноль интеграл столкновений. Действительно, при подстановке максвелловских функций (1.11) в (1.5) обращается в ноль выражение  $(f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta)$ , что следует из закона сохранения энергии при столкновении. Таким образом, максвелловская функция распределения соответствует термодинамическому равновесию. Существует и более сильное утверждение, известное как Н-теорема Больцмана, — система частиц в отсутствие сил стремится к термодинамическому равновесию, а значит, к установлению максвелловских функций распределения.

## 1.2. ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ ПРИ КУЛОНОВСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

### 1.2.1. ОБЩИЙ ВИД ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПОТОКА В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ

Больцмановская форма интеграла столкновений неудобна для описания кулоновского взаимодействия. Связано это с характером кулоновских столкновений, при которых рассеяние обусловлено в основном далекими столкновениями и происходит на малые углы. Малая величина изменения скорости при рассеянии может быть использована для упрощения больцмановского интеграла столкновений. Действительно, при столкновениях в данный элемент фазового объема попадают точки из соседних областей, — имеет место почти непрерывное течение «фазовой жидкости». Другими словами, столкновительный член можно записать в виде дивергенции некоторого потока в пространстве скоростей:

$$St_{\alpha} = -\nabla_{\vec{V}} \cdot \vec{\Gamma}_{\alpha}^{\vec{V}}. \quad (1.12)$$

При этом кинетическое уравнение приобретает вид уравнения непрерывности в шестимерном фазовом пространстве и с учетом столкновений. Общее выражение для потока, обусловленного столкновениями, имеет вид (по второряющемуся индексу  $k$  подразумевается суммирование)

$$\Gamma_{j\alpha}^{\vec{V}} = \frac{F_{j\alpha}^{St}}{m_{\alpha}} f_{\alpha} - D_{jk}^{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial V_k}. \quad (1.13)$$

Здесь отброшены более высокие производные по скоростям, так как наибольший вклад в поток дают близкие области фазового пространства. Величина  $\vec{F}_{j\alpha}^{St}$  называется силой динамического трения, а тензор  $D_{jk}^{\alpha}$  — тензором диффузии в пространстве скоростей. Для столкновений с несколькими сортами частиц

$$\Gamma_{j\alpha}^{\vec{V}} = \sum_{\beta} \Gamma_{j\alpha\beta}^{\vec{V}}.$$

Величины  $\vec{F}_{j\alpha}^{St}$  и  $D_{jk}^{\alpha}$  связаны с параметрами задачи о торможении «пробных» частиц  $\alpha$  в среде полевых частиц  $\beta$ . Рассмотрим облако «пробных» частиц, имевших

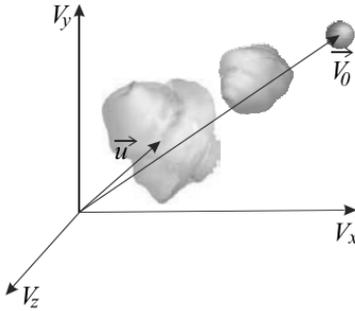


Рис. 1.1

Схема расплывания облака пробных частиц

в момент времени  $t = 0$  одинаковую скорость  $\vec{V} = \vec{V}_0$ . Средняя скорость  $\vec{u}$  при  $t = 0$ , совпадавшая с  $\vec{V}_0$ , с течением времени уменьшается из-за столкновений. Одновременно из-за рассеяния на полевых частицах происходит расплывание облака пробных частиц. Схематически эволюция облака показана на рис. 1.1.

В однородной плазме в отсутствие сил скорость изменения средней скорости может быть преобразована к виду

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{n_\alpha} \int V_j f_\alpha d\vec{V} \right) = \frac{1}{n_\alpha} \int V_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\vec{V} = -\frac{1}{n_\alpha} \int V_j \nabla_{\vec{V}} \cdot \vec{\Gamma}_\alpha^{\vec{V}} d\vec{V}.$$

Интегрируя по частям, учитывая, что  $f_\alpha \rightarrow 0$  при  $\vec{V} \rightarrow \infty$ , и согласно (1.13)  $\vec{\Gamma}_\alpha^{\vec{V}} \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \frac{1}{n_\alpha} \int \Gamma_{j\alpha}^{\vec{V}} d\vec{V} = \frac{1}{n_\alpha} \int \left( \frac{F_{j\alpha}^{St} f_\alpha}{m_\alpha} - D_{jk}^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_k} \right) d\vec{V} = \\ &= \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha \left( \frac{F_{j\alpha}^{St}}{m_\alpha} + \frac{\partial D_{jk}^\alpha}{\partial V_k} \right) d\vec{V}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

После подстановки в (1.14) функции распределения в виде  $f_\alpha|_{t=0} = n_\alpha \delta(\vec{V} - \vec{V}_0)$  имеем

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{F_{j\alpha}^{St}}{m_\alpha} + \frac{\partial D_{jk}^\alpha}{\partial V_k}. \quad (1.15)$$

Расплывание облака пробных частиц в пространстве скоростей естественно характеризовать тензором дисперсии  $\langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k \rangle$ . Среднее определено согласно

$$\langle g \rangle = \int g f d\vec{V} / n.$$

Преобразуя выражение для дисперсии, так же как и для средней скорости, найдем

$$\left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} = 2D_{jk}^\alpha. \quad (1.16)$$

Таким образом, сила динамического трения  $\vec{F}_{j\alpha}^{St}$  и тензор диффузии  $D_{jk}^\alpha$ , а следовательно, и столкновительный член, связаны с параметрами облака пробных частиц.

### 1.2.2. ТОРМОЖЕНИЕ И РАСПЛЫВАНИЕ ОБЛАКА ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Вычислим величины, входящие в левые части (1.15), (1.16). Столкновения частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$  рассматриваем как акт рассеяния в системе центра масс на неподвижном центре с относительной скоростью  $\vec{u}^r = \vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta$  и приведенной массой  $m_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ . Изменение скорости в лабораторной системе отсчета при этом связано с изменением относительной скорости соотношением

$$\Delta \vec{V}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \vec{u}^r.$$

Относительное число актов рассеяния в единицу времени с данным прицельным параметром  $\rho$  и азимутальным углом  $\phi$ , приходящееся на одну пробную частицу, есть

$$dn_\beta(\vec{V}') u^r dS = f_\beta(\vec{V}') d\vec{V}' u^r dS = f_\beta(\vec{V}') d\vec{V}' u^r \rho d\rho d\phi.$$

Умножая это выражение на приращение скорости  $\Delta \vec{V}_\alpha$ , интегрируя по скоростям полевых частиц и по площади, получаем

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = \int f_\beta(\vec{V}') w_j d\vec{V}', \quad w_j = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int \Delta u_j^r u^r dS. \quad (1.17)$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} = \\ & = \int f_\beta(\vec{V}') w_{jk} d\vec{V}', \quad w_{jk} = \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \int \Delta u_j^r \Delta u_k^r u^r dS. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Тензоры  $w_j$ ,  $w_{jk}$  зависят только от относительной скорости, поэтому из соображений тензорной инвариантности

$$w_j = \frac{u_j^r}{u^r} A, \quad w_{jk} = \delta_{jk} B + \frac{u_j^r u_k^r}{(u^r)^2} C, \quad (1.19)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — скаляры. Вычислим эти тензоры в системе отсчета, в которой вектор относительной скорости направлен вдоль оси  $z$ . Изменение относительной скорости при рассеянии на угол  $\theta$  в этой системе:

$$\begin{aligned} \Delta u_x^r &= u^r \sin \theta \cos \phi, \\ \Delta u_y^r &= u^r \sin \theta \sin \phi, \\ \Delta u_z^r &= -u^r (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Для кулоновского взаимодействия связь между углом рассеяния и прицельным параметром дается выражением

$$tg \frac{\theta}{2} = \frac{r_s}{\rho},$$

где радиус сильного взаимодействия  $r_s$  определяется как

$$r_s = \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{m_{\alpha\beta} (u^r)^2}.$$

Выражая изменение скорости через прицельный параметр, получаем

$$\begin{aligned} \Delta u_x^r &= 2u^r \frac{\rho r_s}{\rho^2 + r_s^2} \cos \phi, \\ \Delta u_y^r &= 2u^r \frac{\rho r_s}{\rho^2 + r_s^2} \sin \phi, \\ \Delta u_z^r &= -2u^r \frac{r_s^2}{\rho^2 + r_s^2}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (1.17), (1.18). При интегрировании по  $\rho$  появляются расходящиеся интегралы. Эти интегралы следует обрезать сверху при некотором значении  $\rho = \rho_{\max}$ , так как в плазме кулоновский потенциал экранируется на расстояниях порядка дебаевского радиуса. Выберем  $\rho_{\max} = r_d$ , где дебаевский радиус определен согласно

$$r_d = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}. \quad (1.20)$$

Получающиеся интегралы имеют логарифмическую точность и содержат кулоновский логарифм  $\Lambda$  — большое число порядка 10–15:

$$\Lambda = \ln(r_d/r_s). \quad (1.21)$$

Более подробно про процедуру обрезания см. [6]. В частности,

$$\int_0^{\rho_{\max}} \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + r_s^2} = \Lambda,$$

$$\int_0^{\rho_{\max}} \frac{\rho^3 d\rho}{(\rho^2 + r_s^2)^2} = \Lambda - 1/2 \approx \Lambda.$$

После интегрирования в (1.17) и (1.18) по  $\rho$  и  $\phi$  получаем

$$w_j = -(1 + m_\alpha/m_\beta) L_{\alpha\beta} \frac{u_j^r}{4\pi(u^r)^3},$$

$$w_{jk} = L_{\alpha\beta} \left( \delta_{jk} - \frac{u_j^r u_k^r}{(u^r)^2} \right) \frac{1}{4\pi u^r},$$

$$L_{\alpha\beta} = \Lambda \left( \frac{4\pi Z_\alpha Z_\beta e^2}{m_\alpha} \right)^2.$$

Для скорости изменения средней скорости и дисперсии имеем

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = -(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}) \frac{L_{\alpha\beta}}{4\pi} \int \frac{u_j^r}{(u^r)^3} f_\beta(\vec{V}') d\vec{V}',$$

$$\left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{L_{\alpha\beta}}{4\pi} \int \left( \frac{\delta_{jk}}{u^r} - \frac{u_j^r u_k^r}{(u^r)^3} \right) f_\beta(\vec{V}') d\vec{V}'. \quad (1.22)$$

Скорость изменения моментов более высокого порядка  $\langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k (\vec{V} - \vec{u})_l \rangle$  оказывается в  $\Lambda$  раз меньше. Используя соотношения

$$\frac{\partial^2 u^r}{\partial V_j \partial V_k} = \frac{\delta_{jk}}{u^r} - \frac{u_j^r u_k^r}{(u^r)^3}, \quad \frac{\partial}{\partial V_j} \frac{1}{u^r} = -\frac{u_j^r}{(u^r)^3},$$

запишем (1.22) в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) L_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial V_j} \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_\beta(\vec{V}')}{|\vec{V} - \vec{V}'|} d\vec{V}' \right), \\ \left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} &= L_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial V_j \partial V_k} \left( \frac{1}{4\pi} \int \vec{V} - \vec{V}' \Big|_{f_\beta}(\vec{V}') d\vec{V}' \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Более компактно (1.23) можно переписать, введя «потенциалы»:

$$\begin{aligned} \phi_\beta &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f_\beta(\vec{V}')}{|\vec{V} - \vec{V}'|} d\vec{V}', \\ \Psi_\beta &= -\frac{1}{8\pi} \int \vec{V} - \vec{V}' \Big|_{f_\beta}(\vec{V}') d\vec{V}'. \end{aligned} \quad (1.24)$$

«Потенциалы»  $\phi_\beta$  и  $\Psi_\beta$  связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{V}} \Psi_\beta &= \phi_\beta, \\ \Delta_{\vec{V}} \phi_\beta &= \Psi_\beta, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $\Delta_{\vec{V}}$  — оператор Лапласа в пространстве скоростей. Эти соотношения легко получить, дифференцируя (1.24) по скоростям и используя равенства

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{V}} \frac{1}{|\vec{V} - \vec{V}'|} &= -4\pi \delta(\vec{V} - \vec{V}'), \\ \Delta_{\vec{V}} |\vec{V} - \vec{V}'| &= \frac{2}{|\vec{V} - \vec{V}'|}. \end{aligned}$$

Формулы (1.23) с учетом (1.24) могут быть переписаны в виде

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = -\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) L_{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial V_j}. \quad (1.26)$$

$$\left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_k \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} = -2L_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial V_j \partial V_k}. \quad (1.27)$$

### 1.2.3. ПОТЕРИ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПРОБНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Полученные выражения имеют самостоятельную ценность, так как позволяют найти скорость изменения импульса и энергии пробных частиц, движущихся со скоростью  $\vec{V}$  в среде полевых частиц сорта  $\beta$ . Скорость изменения импульса дается (1.26). Найдем, в частности, скорость изменения импульса электрона при столкновении с ионом. Будем полагать скорость электрона много большей, чем скорость полевых ионов. Тогда, пренебрегая ионной скоростью в знаменателе подынтегрального выражения, получаем  $\phi_i = -n_i/4\pi V_e$  и

$$\left. \frac{\partial p_e}{\partial t} \right|_{t=0} = -v_e p_e, \quad v_e = \frac{4\pi\Lambda e^4 Z^2 n_i}{m_e^2 V_e^3}. \quad (1.28)$$

Частота  $v_e$  здесь соответствует характерному времени торможения электрона в начальный момент, когда все электроны еще имеют одну и ту же начальную скорость. Видно, что частота столкновений обратно пропорциональна кубу скорости электронов, т. е. падает с ростом скорости, что типично для кулоновских столкновений. Пользоваться этим уравнением на более поздних временах нельзя, так как происходит не только торможение, но и рассеяние частиц. Характерное время рассеяния электронов можно найти из (1.27). Выбирая направление  $z$  вдоль скорости электронов, имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_{\perp}^2 \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_x (\vec{V} - \vec{u})_x \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} + \\ &+ \left. \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_y (\vec{V} - \vec{u})_y \rangle}{\partial t} \right|_{t=0} = \\ &= 2v_e V^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Видно, что частота рассеяния оказывается вдвое больше частоты торможения.

Скорость изменения энергии частицы может быть вычислена следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{2} \langle V_j V_j \rangle \Big|_{t=0} = m \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_j \rangle}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} + \vec{u} \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Здесь использовано равенство

$$\langle (\vec{V} - \vec{u})_j (\vec{V} - \vec{u})_j \rangle = \langle V_j V_j \rangle - \vec{u}^2.$$

С учетом (1.26), (1.27)

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial t} \right|_{t=0} = -m_\alpha L_{\alpha\beta} [\phi_\beta + (1 + m_\alpha / m_\beta) \vec{V}_\alpha \nabla_{\vec{V}} \phi_\beta]. \quad (1.30)$$

Вычислим, например, скорость изменения энергии при столкновениях электронов с ионами. Используя электростатическую аналогию для потенциала и поля вне облака распределенных зарядов,  $\phi_i = -n_i / 4\pi V$ ,  $\nabla_{\vec{V}} \phi_i = \frac{\vec{V} n_i}{4\pi V^3}$ , получаем

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} \right|_{t=0} = -v_e^e \varepsilon_e, \quad v_e^e = \frac{2m_e}{m_i} v_e. \quad (1.31)$$

Таким образом, характерное время изменения энергии электрона оказывается в  $m_i / (2m_e)$  раз больше, чем время изменения импульса. В случае, если скорости частиц сравнимы, из (1.30) нетрудно получить несколько более сложные выражения.

#### 1.2.4. СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМЕ ЛАНДАУ

Выражая силу динамического трения и тензор диффузии через потенциалы с помощью (1.15), (1.16), (1.26), (1.27), получаем для потока в пространстве скоростей (1.13):

$$\Gamma_{j\alpha}^{\vec{V}} = -L_{\alpha\beta} \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial V_j} f_\alpha - \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial V_k \partial V_j} \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_k} \right]. \quad (1.32)$$

Используем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial V_j} &= -\frac{1}{8\pi} \int U_{jk} \frac{\partial f'_\beta}{\partial V'_k} d\vec{V}', \\ \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial V_j \partial V_k} &= -\frac{1}{8\pi} \int U_{jk} f'_\beta d\vec{V}'. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Здесь введен тензор

$$U_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{u^r} - \frac{u_j^r u_k^r}{(u^r)^3}. \quad (1.34)$$

Первое из соотношений (1.33) следует из

$$\frac{\partial}{\partial V_j} \int \frac{f'_\beta}{u^r} d\vec{V}' = - \int \frac{u_j^r}{(u^r)^3} f'_\beta d\vec{V}' = - \frac{1}{2} \int \frac{\partial U_{jk}}{\partial V'_k} f'_\beta d\vec{V}' = \frac{1}{2} \int \frac{\partial f'_\beta}{\partial V'_k} U_{jk} d\vec{V}',$$

с учетом

$$\frac{u_j^r}{(u^r)^3} = - \frac{1}{2} \frac{\partial U_{jk}}{\partial V'_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_{jk}}{\partial V'_k}.$$

Второе соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial V_j \partial V'_k} &= - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial V_j} \int \frac{\partial u^r}{\partial V'_k} f'_\beta d\vec{V}' = \\ &= - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial V_j} \int \frac{u_k^r}{u^r} f'_\beta d\vec{V}' = - \frac{1}{8\pi} \int U_{jk} f'_\beta d\vec{V}'. \end{aligned}$$

Подставляя (1.33) в (1.32), получаем поток в пространстве скоростей:

$$\Gamma_{j\alpha}^{\vec{V}} = \frac{2\pi\Lambda Z_\alpha^2 Z_\beta^2 e^4}{m_\alpha} \int U_{jk} \left( \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f'_\beta}{\partial V'_k} - \frac{f'_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial V'_k} \right) d\vec{V}'. \quad (1.35)$$

Столкновительный член в форме Ландау есть минус дивергенция этого потока:

$$St_{\alpha\beta} = - \frac{2\pi\Lambda Z_\alpha^2 Z_\beta^2 e^4}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial V_j} \int U_{jk} \left( \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f'_\beta}{\partial V'_k} - \frac{f'_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial V'_k} \right) d\vec{V}'. \quad (1.36)$$

### 1.3. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Столкновительный член в форме Ландау остается достаточно сложным. В некоторых задачах возможно его дальнейшее упрощение. К таким ситуациям относится случай малой примеси тяжелых частиц в плазме с легкими ионами. Пусть  $f_\alpha$  — функция распределения тяжелых частиц, а  $n_\alpha \ll n_\beta$ . Будем считать, что тяжелые ионы не влияют на функцию распределения легких частиц  $f_\beta$ ,

а саму функцию  $f_\beta$  полагаем максвелловской. Используя для  $f = f^M$  соотношение

$$\frac{\partial f'_\beta}{\partial V'_k} = -\frac{m_\beta}{T_\beta} V'_k f'_\beta,$$

упростим интеграл столкновений Ландау (1.36). Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial V_j} \int U_{jk} \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f'_\beta}{\partial V'_k} d\vec{V}' = \\ & = -\frac{\partial}{\partial V_j} \int U_{jk} \frac{f_\alpha}{T_\beta} V'_k f'_\beta d\vec{V}' = -\frac{\partial}{\partial V_j} \int U_{jk} \frac{f_\alpha}{T_\beta} (V_k - u_k^r) f'_\beta d\vec{V}'. \end{aligned}$$

Второй член в этом выражении обращается в нуль, так как имеет место тождество

$$U_{jk} u_k^r = 0. \quad (1.37)$$

Так как  $|\vec{V}'| \gg |\vec{V}|$ , то  $\vec{u}^r \approx -\vec{V}'$ , поэтому

$$-\frac{\partial}{\partial V_j} \int U_{jk} \frac{f_\alpha}{T_\beta} V'_k f'_\beta d\vec{V}' = -\frac{\partial}{\partial V_j} \int \left[ \frac{\delta_{jk}}{V'} - \frac{V_j V'_k}{(V')^3} \right] \frac{f_\alpha}{T_\beta} V'_k f'_\beta d\vec{V}'.$$

Во втором слагаемом члены с  $j \neq k$  обращаются в нуль (в системе отсчета, где отсутствует средняя скорость  $\vec{u}^r$ ), поэтому остается интеграл

$$-\frac{\partial}{\partial V_j} \int \frac{f_\alpha f'_\beta}{T_\beta} V_j \frac{(V')^2 - (V'_j)^2}{(V')^3} d\vec{V}' = -\frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{m_\beta^{1/2}}{T_\beta^{3/2}} n_\beta \frac{\partial}{\partial \vec{V}} (f_\alpha \vec{V}).$$

Аналогичным образом преобразуется и второе слагаемое в столкновительном интеграле Ландау (1.36). Окончательно кинетическое уравнение с упрощенным столкновительным членом имеет следующий вид:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \tilde{\nu}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \vec{V}} (\vec{V} f_\alpha + \frac{T_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}}), \quad (1.38)$$

где частота столкновений  $\tilde{\nu}_{\alpha\beta}$  определена согласно

$$\tilde{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{4\sqrt{2\pi} m_\beta^{1/2} \Lambda Z_\alpha^2 Z_\beta^2 e^4 n_\beta}{3m_\alpha T_\beta^{3/2}}. \quad (1.39)$$

Уравнение (1.38) называется уравнением Фоккера — Планка. В однородной плазме в отсутствие внешних сил

оно описывает релаксацию  $f_\alpha$  к максвелловской функции распределения с температурой  $T_\beta$ :

$$f_\alpha^M = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi T_\beta} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_\alpha V^2}{2T_\beta} \right),$$

за характерное время релаксации  $\tau = \tilde{\nu}_{\alpha\beta}^{-1}$ . Действительно, легко видеть, что  $f_\alpha^M$  обращает в нуль правую часть уравнения (1.38). Уравнение Фоккера — Планка линейное и легко решается.

Покажем, как с помощью уравнения Фоккера — Планка можно вычислить, например, подвижность примесей — коэффициент пропорциональности между направленной скоростью и электрическим полем. В стационарной однородной плазме, находящейся в электрическом поле, имеем

$$\frac{Z_\alpha e \vec{E}}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} = \tilde{\nu}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \vec{V}} (\vec{V} f_\alpha + \frac{T_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}}). \quad (1.40)$$

Умножим (1.40) на  $\vec{V}$  и проинтегрируем по скоростям. Интегрируя по частям, найдем, что первый член в правой части пропорционален потоку частиц  $n_\alpha \vec{u}_\alpha$ , а второй обращается в ноль. Интеграл же от левой части дает  $-Z_\alpha n_\alpha e \vec{E}$ . Окончательно

$$\vec{u}_\alpha = b_\alpha \vec{E}, \quad b_\alpha = \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha \tilde{\nu}_{\alpha\beta}}. \quad (1.41)$$

Нетрудно и полностью решить уравнение (1.40). В достаточно слабых электрических полях, когда направленная скорость много меньше тепловой, можно искать решение в виде максвелловской функции плюс поправка:  $f = f^M + f^1$ . При этом в линейном приближении в левой части (1.40) достаточно положить  $f_\alpha = f_\alpha^M$ , а в правой части  $f_\alpha = f_\alpha^1$ , так как максвелловская функция распределения обращает правую часть в ноль. Нетрудно получить выражение

$$f_\alpha^1 = \frac{m_\alpha}{T_\beta} (\vec{u}_\alpha \vec{V}) f_\alpha^M, \quad (1.42)$$

где направленная скорость дается (1.41). Другими словами, полная функция распределения представляет собой разложенное в ряд сдвинутое максвелловское распределение:

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha} &= n_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\beta}} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_{\alpha} (\vec{V} - \vec{u}_{\alpha})^2}{2T_{\beta}} \right) \approx \\
 &\approx n_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\beta}} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_{\alpha} V^2}{2T_{\beta}} \right) \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{T_{\beta}} \vec{u}_{\alpha} \vec{V} \right). \quad (1.43)
 \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае функция распределения в электрическом поле не имеет такого простого вида.

#### 1.4. УБЕГАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Проанализируем функцию электронов в однородной плазме в отсутствие магнитного поля в слабом электрическом поле:

$$E \ll E_D = \frac{4\pi e^3 \Lambda n}{T_e}, \quad (1.44)$$

где величину  $E_D$  называют полем Драйзера. Это условие означает, что электрическая сила меньше, чем сила трения, действующая на основную массу электронов с тепловыми скоростями порядка  $V_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ :

$$enE \ll nm_e v_e (V_{Te}) V_{Te} \sim nm_e V_{Te} \frac{4\pi n e^4 \Lambda}{m_e^2 V_{Te}^3},$$

откуда следует (1.44). В обратном случае большинство электронов неограниченно ускоряется, так как сила трения из-за падающей зависимости частоты столкновений от скорости не может уравновесить электрическую силу. При выполнении же условия (1.44) в режим ускорения попадает лишь небольшая часть электронов, так что у функции распределения образуется хвост, вытянутый в направлении  $-\vec{E}$ , рис. 1.2. Основная масса электронов описывается максвелловской функцией распределения, а за счет кулоновских столкновений возникает поток электронов в хвост. Так как число убегающих электронов мало (как показано ниже — экспоненциально мало), то задачу об убегающих электронах можно рассматривать как ста-

ционарную. Действительно, концентрация основной части электронов в этом случае медленно уменьшается или подпитывается небольшим постоянным источником.

Ограничимся тем, что найдем число электронов, попадающих в единицу времени в режиме убегания, то есть найдем стационарный поток в пространстве скоростей в область больших энергий. Кинетическое уравнение в электрическом поле имеет вид

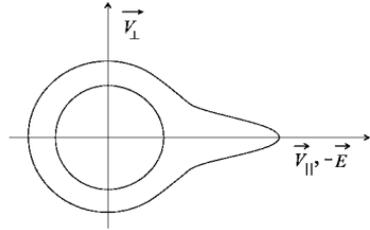


Рис. 1.2  
Поверхности постоянной функции распределения в электрическом поле

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial \vec{V}} + \nabla_{\vec{V}} \cdot \vec{\Gamma} \vec{V} = 0. \quad (1.45)$$

В пространстве скоростей введем сферические координаты с осью  $z$  вдоль  $-\vec{E}$ . Запишем второе слагаемое в (1.45) в виде (зависимость от азимутального угла отсутствует в силу симметрии задачи)

$$\begin{aligned} -\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial \vec{V}} &= \frac{eE}{m_e} \left( \cos\theta \frac{\partial f}{\partial V} - \frac{\sin\theta}{V} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{eE}{m_e} \left[ \frac{\cos\theta}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} (V^2 f) - \frac{1}{V \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (f \sin^2 \theta) \right]. \end{aligned}$$

Дивергенцию столкновительного потока в пространстве скоростей (третье слагаемое в (1.45)) также запишем в сферических координатах:

$$\nabla_{\vec{V}} \cdot \vec{\Gamma} \vec{V} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} (V^2 \Gamma_V^{\vec{V}}) + \frac{1}{V \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \Gamma_{\theta}^{\vec{V}}).$$

Введем усредненный по углам поток в пространстве скоростей:

$$\bar{\Gamma}_V^{\vec{V}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \Gamma_V^{\vec{V}}.$$

Усредним кинетическое уравнение для быстрых электронов по углам, полагая  $\cos\theta \approx 1$ , так как функция рас-

предела быстрых электронов сильно вытянута вдоль направления  $-\vec{E}$ . Из (1.45) имеем

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{eE}{m_e V^2} \frac{\partial}{\partial V} (V^2 \bar{f}) + \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} (V^2 \bar{\Gamma} \bar{V}) = 0. \quad (1.46)$$

Усредненная функция распределения  $\bar{f}$  достаточна для вычисления интегрального потока в пространстве скоростей. В столкновительном члене достаточно учесть лишь столкновения быстрых электронов с медленными, распределенными по Максвеллу, так как столкновения с ионами дают малый вклад в поток по энергиям, а столкновения быстрых электронов между собой пренебрежимо малы.

Согласно (1.35) компонент потока быстрых электронов в пространстве скоростей:

$$\begin{aligned} \Gamma_j^{\bar{V}} &= \frac{2\pi\Lambda e^4}{m_e} \int U_{jk} \left( \frac{f}{m_e} \frac{\partial f^M(\vec{V}')}{\partial V'_k} - \frac{f^M(\vec{V}')}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V_k} \right) d\vec{V}' = \\ &= -\frac{2\pi\Lambda e^4}{m_e T_e} \int U_{jk} \left( V'_k f f^M(\vec{V}') + \frac{T_e}{m_e} f^M(\vec{V}') \frac{\partial f}{\partial V_k} \right) d\vec{V}'. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Здесь  $f^M$  — не сдвинутая максвелловская функция распределения. Преобразуем первый член в этом выражении. В первом приближении относительная скорость совпадает со скоростью быстрого электрона  $\vec{u}^r = \vec{V}$ , тензор  $U_{jk}$  не зависит от  $V'$  и интеграл обращается в ноль. В следующем приближении, полагая  $u^r = V(1 - V_j V'_j / V^2)$ , имеем

$$\begin{aligned} &\int U_{jk} V'_k f f^M(\vec{V}') d\vec{V}' = \\ &= \int \left( \frac{\delta_{jk} V_i V_i V'_k}{V} + \frac{V_j V_k V'_k}{V^2} + \frac{V_j V_k V'_k}{V^3} - \frac{V_j V_k}{V^3} \frac{3V_i V'_i}{V^2} V'_k \right) f f^M(\vec{V}') d\vec{V}'. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Последнее слагаемое при интегрировании сокращается с предыдущим членом, так как

$$\begin{aligned} &3 \int \frac{V_k V'_k V_i V'_i}{V^2} f^M(\vec{V}') d\vec{V}' = \\ &= 3 \frac{V_k^2}{V^2} \int (V'_k)^2 f^M(\vec{V}') d\vec{V}' = \frac{V_k^2}{V^2} \int (V')^2 f^M(\vec{V}') d\vec{V}'. \end{aligned}$$

Первые же два слагаемых в (1.48) одинаковы. Поэтому получаем

$$\int U_{jk} V_k' f f^M(\vec{V}') d\vec{V}' = \frac{2T_e}{m_e V^3} V_j f.$$

Второй член в (1.47) преобразуется аналогичным образом. При этом надо учесть, что  $V_{\perp} \ll V$ , и раскладывать тензор скоростей сдвигов с точностью до членов порядка  $(V')^2$ . Окончательно поток в направлении  $\vec{V}$ :

$$\Gamma_V^{\vec{V}} = -v_e(V) \left( Vf + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V} \right),$$

где

$$v_e(V) = \frac{4\pi n e^4 \Lambda}{m_e^2 V^3}$$

— частота столкновений быстрого электрона. После усреднения по углам

$$\bar{\Gamma}_V^{\vec{V}} = -v_e(V) \left( V\bar{f} + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial \bar{f}}{\partial V} \right). \quad (1.49)$$

Полный поток в пространстве скоростей, как следует из (1.46), есть

$$S_V = \bar{\Gamma}_V^{\vec{V}} + \frac{eE}{m_e} \bar{f}. \quad (1.50)$$

В пренебрежении производной по времени из (1.46) следует сохранение интегрального потока в пространстве скоростей:

$$4\pi V^2 S_V = \text{const} = \dot{n}_r. \quad (1.51)$$

Здесь  $\dot{n}_r$  — искомое количество электронов, убегающих в единицу времени. Это выражение является уравнением для усредненной функции распределения. В безразмерных переменных

$$\alpha = \frac{E}{E_D}, \quad u = \frac{Vm_e^{1/2} \alpha^{1/2}}{T_e^{1/2}}$$

уравнение (1.51) имеет вид

$$\frac{d\bar{f}}{du} + \frac{u-u^3}{\alpha} \bar{f} = -Cu, \quad C = \frac{\dot{n}_r m_e^2}{16\pi^2 n e^2 \Lambda \alpha^{1/2}}. \quad (1.52)$$

Решение уравнения (1.52) дается выражением

$$\bar{f} = F - CF \int_0^u \frac{u'}{F(u')} du', \quad F = A \exp \left[ \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{u^4}{2} - u^2 \right) \right]. \quad (1.53)$$

При  $\bar{u} \rightarrow 0$  функция распределения  $\bar{f} \rightarrow f^{(M)}$ . Из этого условия находим константу  $A$ :

$$A = n \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2}.$$

При  $u \rightarrow \infty$  функция  $F \rightarrow \infty$ , а  $\bar{f}$  — ограничена, поэтому отношение  $\bar{f}/F \rightarrow 0$ . Отсюда находим константу  $C$ :

$$C^{-1} = \int_0^\infty \frac{u}{F} du = \frac{1}{n} \left( \frac{2\pi T_e}{m_e} \right)^{3/2} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha} \left( \frac{u^4}{2} - u^2 \right) \right] u du.$$

Данный интеграл вычисляется методом перевала. Количество убегающих электронов пропорционально

$$\dot{n}_r = \beta(\alpha) n v_e (V_{Te}) \exp(-E_D/4E). \quad (1.54)$$

Здесь  $\beta(\alpha)$  — некоторая безразмерная степенная функция параметра  $\alpha$ , которая не может быть определена в рамках данного приближения. Дело в том, что поле Драйсера пропорционально кулоновскому логарифму  $\Lambda$ , который, таким образом, входит в показатель экспоненты (1.54). Так как величина  $\Lambda$  определена с логарифмической точностью, то для нахождения  $\beta$  необходимо выйти за рамки этого приближения. Таким образом, формула (1.54) решает поставленную задачу с логарифмической точностью.

Если электрическое поле больше, чем поле Драйсера, то основным механизмом генерации быстрых электронов является так называемый эффект лавины — размножение быстрых электронов за счет близких кулоновских столкновений быстрых электронов с тепловыми. При таких столкновениях быстрые электроны со скоростями порядка скорости света генерируют новые быстрые электроны, а темп генерации пропорционален уже существующему количеству быстрых электронов. Частота столкновений для электронов,двигающихся со скоростью порядка скорости света, согласно (1.28) определяется как

$$v_e(c) = \frac{4\pi\Lambda e^4 n}{m_e^2 c^3}. \quad (1.55)$$

Если электрическое поле больше, чем критическое ( $E_c = E_D(c)$ )

$$E_c = \frac{4\pi\Lambda e^3 n}{m_e c^2}, \quad (1.56)$$

то такие электроны часть энергии передают медленным электронам. При  $E \gg E_c$  в режим ускорения могут переходить электроны со скоростями  $V > V_0 = c(E_c/E)^{1/2}$ . Так как кулоновское сечение обратно пропорционально кубу угла рассеяния и, следовательно, кубу переданного импульса, то такие электроны рождаются в результате рассеяния быстрых электронов с частотой

$$v_e^* = \frac{4\pi e^4 n}{m_e^2 V^3}.$$

Количество рождений по порядку величины дается ( $f_r$  — не зависящая от скорости одномерная функция распределения быстрых электронов)

$$\int_{V_0}^c v_e^* f_r dV = \frac{f_r}{2c^2} \left( \frac{c^2}{V_0^2} - 1 \right) \frac{4\pi e^4 n}{m_e^2}.$$

Полагая быстрые электроны распределенными равномерно, так что их концентрация  $n_r = c f_r$ , получаем с точностью до численного коэффициента количество быстрых электронов, рождающихся в единицу времени:

$$\dot{n}_r = n_r v_e(c) (E/E_c - 1) / (2\Lambda). \quad (1.57)$$

Обрезающий множитель  $(E/E_c - 1)$  показывает, что лавинный эффект имеет пороговый характер.

### 1.5. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Описанный в предыдущем разделе факт, что электроны в слабоионизованной плазме являются малой примесью, позволяет линеаризовать столкновительный член и существенно упростить кинетическое уравнение.

Слабоионизованной называют плазму, в которой выполняется неравенство

$$v_{ee} \ll v_{eN}, \quad (1.58)$$

где  $v_{ee}$  — электронная частота столкновений (для определенности будем под  $v_{ee}$  понимать частоту, совпадающую с  $v_e(V)$  предыдущего раздела), а  $v_{eN}$  электрон — нейтральная частота столкновений. При этом условия (1.58) еще недостаточно для того, чтобы электроны можно было считать малой примесью. Дело в том, что изменение энергии электрона при столкновении с нейтральными частицами происходит с частотой

$$v_{eN}^e = \delta_{eN} v_{eN} = \frac{2m_e}{m_N} v_{eN}, \quad (1.59)$$

а энергия электрона при столкновении с электронами изменяется за время  $\sim v_{ee}^{-1}$  — практически за одно столкновение. Поэтому пренебречь кулоновскими столкновениями в слабоионизованной плазме можно лишь при жестком условии

$$v_{ee} \ll v_{eN}^e. \quad (1.60)$$

Промежуточный случай

$$v_{eN}^e \ll v_{ee} \ll v_{eN} \quad (1.61)$$

также соответствует слабоионизованной плазме, причем из-за частых межэлектронных столкновений функция распределения близка к максвелловской.

### 1.5.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ $f_0, \vec{f}_1$

Пусть выполнено условие (1.60). Из-за малых потерь энергии электрона при столкновении с нейтральными частицами направленная скорость электрона мала по сравнению с хаотичной. Поэтому мала и анизотропия функции распределения. Функцию распределения при этом естественно искать в виде убывающего ряда по сферическим гармоникам:

$$f(\vec{r}, \vec{V}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m(\vec{r}, V, t) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (1.62)$$

где коэффициенты  $f_l^m$  зависят только от модуля скорости. Сферические функции выражаются через присоединенные полиномы Лежандра:

$$Y_l^m = P_l^m(\cos\theta)\exp(im\phi).$$

Первые сферические функции имеют вид

$$Y_0^0 = 1, \quad Y_1^0 = \cos\theta, \quad Y_1^1 = \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Ограничимся первыми двумя членами ряда. Тогда (1.62) можно записать в виде

$$f(\vec{r}, \vec{V}, t) = f_0(\vec{r}, V, t) + \frac{\vec{f}_1(\vec{r}, V, t)\vec{V}}{V}. \quad (1.63)$$

Подставим функцию распределения (1.63) в кинетическое уравнение для электронов и преобразуем последовательно его члены. Для первого слагаемого имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\vec{V}}{V} \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial t}. \quad (1.64)$$

Член с пространственной производной принимает вид

$$\vec{V}\nabla_{\vec{r}}f = \vec{V}\nabla_{\vec{r}}f_0 + \vec{V}\nabla_{\vec{r}}(\vec{f}_1\vec{V}/V).$$

Используя векторное соотношение

$$\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F}\nabla)\vec{G} + (\vec{G}\nabla)\vec{F} + [\vec{F} \cdot \nabla]\vec{G} + [\vec{G} \cdot \nabla]\vec{F},$$

получаем

$$\vec{V}\nabla_{\vec{r}}f = \vec{V}\nabla_{\vec{r}}f_0 + \frac{\vec{V}}{V}(\vec{V}\nabla_{\vec{r}})\vec{f}_1. \quad (1.65)$$

Остальные слагаемые преобразуются аналогично:

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{m_e} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \right) \nabla_{\vec{v}} f = \\ & = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\vec{V}}{V} \frac{\partial f_0}{\partial V} - \frac{e\vec{E}}{m_e} (\vec{V}\nabla_{\vec{v}}) \frac{\vec{f}_1}{V} - \frac{e\vec{E}\vec{f}_1}{m_e V} - \frac{e}{m_e c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \frac{\vec{f}_1}{V}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Столкновительный член также разбивается на два слагаемых (для однородного покоящегося нейтрального газа):

$$St_{eN} = St_{eN}^0 + St_{eN}^1,$$

зависящих от  $f_0$  и  $\vec{f}_1$  соответственно. Умножая кинетическое уравнение на  $(1/4\pi)d\Omega$  ( $d\Omega$  — элемент телесного угла

в пространстве скоростей, ось для простоты можно направить вдоль  $\vec{f}_1$ ) и интегрируя по углам, получаем усредненное уравнение:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{V}{3} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{f}_1 - \frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{V}{3} \frac{\partial (\vec{f}_1/V)}{\partial V} - \frac{e\vec{E}}{m_e V} \vec{f}_1 = St_{eN}^0. \quad (1.67)$$

Умножая кинетическое уравнение на направляющие косинусы  $V_j/V$  и  $(3/4)d\Omega$  и интегрируя по  $d\Omega$ , получаем три уравнения. Складывая их, получаем одно векторное уравнение:

$$\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial t} + V \nabla_{\vec{r}} f_0 - \frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V} + \frac{e}{m_e c} [\vec{B} \cdot \vec{f}_1] = \langle St_{eN}^1 \rangle. \quad (1.68)$$

Выражение для столкновительного члена, описывающего электрон-нейтральные столкновения, можно получить из общего выражения (1.5). Проще это сделать непосредственно, полагая нейтральные частицы холодными и покоящимися. Действительно, так как относительная скорость совпадает со скоростью электрона, то число «приходов» минус число «уходов» в единицу объема пространства скоростей имеет вид (дифференциальное сечение рассеяния для краткости обозначим  $\sigma$ )

$$St_{eN} d\vec{V} = \int_{\Omega} n_N \sigma(V, \theta) V f' d\Omega d\vec{V}' - \int_{\Omega} n_N \sigma(V, \theta) V f d\Omega d\vec{V}.$$

Скорости электрона до и после столкновения связаны соотношением

$$V' = V \left[ 1 + \frac{2m_e}{m_N} (1 - \cos\theta) \right]^{1/2}.$$

Отсюда следует соотношение  $dV'/V' = dV/V$ . Поэтому

$$d\vec{V}' = V'^2 dV' d\Omega = \frac{V'^3}{V} dV d\Omega = \frac{V'^3}{V^3} d\vec{V}.$$

Выражая  $d\vec{V}'$  через  $d\vec{V}$  в интеграле столкновений, имеем

$$St_{eN} = \frac{n_N}{V^3} \int_{\Omega} [V'^4 f' \sigma(V', \theta) - V^4 f \sigma(V, \theta)] d\Omega. \quad (1.69)$$

Вычислим сначала столкновительный член (1.69) в первом приближении по  $m_e/m_N$ . В этом приближении

$V' = V$ , поэтому и  $f_0 = f'_0$ , так что согласно (1.69)  $St_{eN}^0 = 0$ . Подставляя в (1.69) поправку  $\vec{f}_1 \vec{V} / V$ , получим

$$St_{eN}^1 = n_N V |f_1| \int_{\Omega} [\sigma(V, \tilde{\theta}) \cos \theta' - \sigma(V, \tilde{\theta}) \cos \theta] d\Omega. \quad (1.70)$$

Здесь угол рассеяния между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{V}'$  обозначен  $\tilde{\theta}$ , а  $\theta, \phi$  и  $\theta', \phi'$  — углы в сферической системе координат векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{V}'$  соответственно. Переходим от интегрирования по углам рассеяния к эквивалентному интегрированию по углам  $\theta', \phi'$ . Преобразуем первый член в подынтегральном выражении. Разложим сечение рассеяния в ряд по полиномам Лежандра:

$$\sigma(V, \tilde{\theta}) = \sum_k \sigma_k P_k(\cos \tilde{\theta}).$$

Используем формулу для косинуса угла между двумя векторами:

$$\cos \tilde{\theta} = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

Согласно теореме сложения для сферических функций

$$\begin{aligned} P_k(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')) &= P_k(\cos \theta) P_k(\cos \theta') = \\ &= 2 \sum_{m=1}^k \frac{(k-m)!}{(k+m)!} P_k^m(\cos \theta) P_k^m(\cos \theta') \cos(m(\phi - \phi')). \end{aligned}$$

При интегрировании первого члена в (1.70) в силу ортогональности полиномов Лежандра остается лишь

$$\int_{\Omega} \sigma(V, \tilde{\theta}) \cos \theta' d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_1 \cos^2 \theta' d\Omega = (4\pi/3) \sigma_1.$$

Удобно переписать это выражение тоже с учетом ортогональности в виде

$$\int_{\Omega} \sigma(V, \tilde{\theta}) \cos \theta' d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(V, \tilde{\theta}) \cos \tilde{\theta} d\Omega.$$

Объединяя оба члена в (1.70), получаем

$$St_{eN}^1 = -v_{eN}(V) \vec{f}_1 \vec{V} / V, \quad (1.71)$$

где

$$v_{eN}(V) = n_N V \int_{\Omega} (1 - \cos \theta) \sigma(V, \theta) d\Omega \quad (1.72)$$

совпадает с транспортной частотой электрон-нейтральных столкновений. После усреднения с весом  $3V_j/(4\pi V)$  имеем

$$\langle St_{eN}^1 \rangle = -v_{eN}(V)\vec{f}_1. \quad (1.73)$$

Чтобы получить отличное от нуля значение  $St_{eN}^0$ , необходимо в столкновительном члене (1.69) учесть члены первого порядка по  $m_e/m_N$ . Подставляем  $f_0$  в (1.69) и раскладываем подынтегральное выражение в ряд:

$$St_{eN}^0 = \frac{n_N}{V^3} \int_{\Omega} [V'^2 - V^2] \frac{\partial}{\partial V^2} (V^4 f_0 \sigma) d\Omega. \quad (1.74)$$

Подставляя в (1.74) значение  $V'$ , получаем

$$St_{eN}^0 = \frac{2m_e}{m_N} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial V^2} [v_{eN}(V)V^3 f_0]. \quad (1.75)$$

Столкновительные члены (1.73) и (1.75) находятся в правых частях уравнений для  $f_0$  и  $\vec{f}_1$ , которые позволяют получить конкретные выражения для изотропной и направленной частей функции распределения.

### 1.5.2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Найдем функцию распределения электронов в однородной плазме, помещенной в стационарное однородное электрическое поле в отсутствие магнитного поля. В этом случае уравнения (1.73), (1.75) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{V}{3} \frac{\partial(\vec{f}_1/V)}{\partial V} - \frac{e\vec{E}}{m_e V} \vec{f}_1 &= \frac{2m_e}{m_N} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial V^2} [v_{eN}(V)V^3 f_0], \\ \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial t} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V} &= -v_{eN}(V)\vec{f}_1. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Так как имеется лишь одно выделенное направление, то  $\vec{f}_1 \parallel \vec{E}$ . Как следует из второго уравнения, время установления направленной функции распределения составляет  $v_{eN}^{-1}$ , т. е. происходит практически за одно столкновение и соответствует времени релаксации импульса. В стационарном состоянии

$$\vec{f}_1 = \frac{e\vec{E}}{m_e v_{eN}(V)} \frac{\partial f_0}{\partial V}. \quad (1.77)$$

Уравнение для  $f_0$  перепишем в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{3V^2} \frac{e\bar{E}}{m_e} \frac{\partial(\bar{f}_1 V^2)}{\partial V} = \frac{m_e}{m_N} \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} [v_{eN}(V) V^3 f_0]. \quad (1.78)$$

После подстановки  $\bar{f}_1$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{3V^2} \frac{e^2 E^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial V} \left[ \frac{V^2}{v_{eN}(V)} \frac{\partial f_0}{\partial V} \right] = \\ = \frac{m_e}{m_N} \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} [v_{eN}(V) V^3 f_0]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Релаксация функции  $f_0$  имеет диффузионный характер и за время порядка  $v_{eN}^{-1} m_N / m_e$  устанавливается стационарная функция распределения. Ее нетрудно найти, интегрируя (1.79) при  $\partial f_0 / \partial t = 0$ :

$$f_0 = A \exp \left[ - \int_0^V \frac{3m_e^3 V' v_{eN}^2(V')}{e^2 E^2 m_N} dV' \right]. \quad (1.80)$$

Функция распределения электронов определяется характером зависимости частоты столкновений от скорости. Если частота столкновений не зависит от скорости (такая ситуация имеет место для  $He$  в широком диапазоне скоростей), то из (1.80) следует

$$f_0 = A \exp \left[ - \frac{m_e V^2}{2T_{eff}} \right], \quad (1.81)$$

где

$$T_{eff} = \frac{e^2 E^2 m_N}{3m_e^2 v_{eN}^2}. \quad (1.82)$$

В этом случае функция распределения является максвелловской с эффективной температурой (1.82). Так как процесс набора энергии носит диффузионный характер с коэффициентом диффузии  $D_V \sim e^2 E^2 / (m_e^2 v_{eN})$  согласно (1.79), то за время  $v_{eN}^{-1} m_N / m_e$  средний квадрат скорости  $V^2 \sim D_V v_{eN}^{-1} m_N / m_e$ , а средняя энергия оказывается порядка (1.82).

Второй случай соответствует постоянной длине пробега  $\lambda_{eN}$ . При этом частота столкновений пропорциональна скорости:  $v_{eN}(V) = V / \lambda_{eN} \sim V$ . Согласно (1.80)

$$f_0 = A \exp \left[ -\frac{3m_e^3 V^4}{4e^2 E^2 m_N \lambda_{eN}^2} \right]. \quad (1.83)$$

Это выражение называют функцией распределения Дрювестайна. Зависимость от скорости в этом распределении гораздо сильнее, чем для максвелловской функции распределения.

### 1.5.3. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

При условии (1.61) межэлектронные столкновения начинают оказывать существенное влияние на функцию распределения электронов. В правых частях уравнений для  $f_0$  и  $\bar{f}_1$  (1.67)–(1.68) появляются дополнительные слагаемые  $St_{ee}$ . Дополнительный столкновительный член в уравнении для  $f_0$  имеет порядок  $v_{ee} f_0$ , в то время как  $St_{eN}^0 \sim (m_e / m_N) v_{eN} f_0$ . Поэтому, при условии (1.61), главным в правой части этого уравнения является член  $St_{ee}(f_0, f_0)$ . Для не слишком сильных электрических полей и плавных градиентов члены в левой части (1.67) малы по сравнению с  $v_{ee} f_0$ , поэтому решением уравнения для  $f_0$  является функция, обращающая в ноль правую часть  $St_{ee}(f_0, f_0) = 0$ , т. е. максвелловская функция распределения  $f^M$ . В правой же части уравнения для  $\bar{f}_1$  (1.68) дополнительное слагаемое  $St_{ee} \sim v_{ee} |\bar{f}_1|$  мало по сравнению с  $\langle St_{eN}^1 \rangle$ . Поэтому уравнение для  $\bar{f}_1$  остается неизменным и по-прежнему  $\bar{f}_1$  выражается через  $f_0$  согласно (1.68), куда в качестве  $f_0$  следует подставлять максвелловскую функцию распределения.

В неоднородной плазме это утверждение справедливо, если характерный масштаб неоднородности  $L$  превосходит длину релаксации функции распределения  $\lambda_f$ . Релаксация  $f_0$  к  $f^M$  происходит за время  $v_{ee}^{-1}$ , поэтому длина  $\lambda_f$  соответствует смещению за счет случайных блужданий за это время. Вдоль магнитного поля шаг случайных блужданий есть  $\lambda_{eN}$ , а поперек магнитного поля — ларморовский радиус электронов  $\rho_{ce}$ . Поэтому

$$\lambda_{f\parallel} = \lambda_{eN} (v_{eN} / v_{ee})^{1/2}, \quad \lambda_{f\perp} = \rho_{ce} (v_{eN} / v_{ee})^{1/2}.$$

#### 1.5.4. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ $\vec{f}_1$

Общее решение уравнения (1.68) для медленных процессов имеет вид

$$\vec{f}_1 = -\hat{M} \left( V \frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V} \right), \quad (1.84)$$

где

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{v_{eN}}{\omega_{ce}^2 + v_{eN}^2} & -\frac{\omega_{ce}}{\omega_{ce}^2 + v_{eN}^2} & 0 \\ \frac{\omega_{ce}}{\omega_{ce}^2 + v_{eN}^2} & \frac{v_{eN}}{\omega_{ce}^2 + v_{eN}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/v_{eN} \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Здесь  $\omega_{ce} = eB/(m_e c)$ . При условии (1.61) функция  $f_0$  близка к максвелловской.

### 1.6. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОНОВ В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Потоки частиц и тепла в слабоионизованной плазме с функцией распределения, близкой к максвелловской, могут быть найдены непосредственным интегрированием функции распределения. Поток электронов  $\vec{\Gamma}_e$  имеет вид

$$\vec{\Gamma}_e = n\vec{u}_e = \int \vec{V} (f_0 + \frac{\vec{f}_1 \vec{V}}{V}) d\vec{V} = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \vec{f}_1 V^3 dV. \quad (1.86)$$

Так как функция  $\vec{f}_1$  является линейной функцией градиентов концентрации, электронной температуры и потенциала, то поток электронов можно переписать в виде

$$\vec{\Gamma}_e = -\hat{D}_e \nabla n - \hat{b}_e \vec{E} n - \hat{D}_e^T n \nabla T_e / T_e, \quad (1.87)$$

где  $\hat{D}_e$  — тензор диффузии,  $\hat{D}_e^T$  — тензор термодиффузии,  $\hat{b}_e$  — тензор подвижности. Подставляя в (1.86) функцию  $\vec{f}_1$ , выраженную через  $f_0$  (1.84), получаем для  $f_0$  близкой к максвелловской

$$\begin{aligned}\hat{b}_e &= \frac{4\pi e}{3nT_e} \int_0^\infty V^4 \hat{M}(V) f_0 dV, \\ \hat{D}_e &= \frac{4\pi}{3n} \int_0^\infty V^4 \hat{M}(V) f_0 dV, \\ \hat{D}_e^T &= \frac{4\pi}{3n} \int_0^\infty V^4 \hat{M}(V) \left( \frac{m_e V^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) f_0 dV = T_e \frac{d\hat{D}_e}{dT_e}.\end{aligned}\quad (1.88)$$

Тензоры диффузии и подвижности могут быть вычислены для конкретной зависимости  $v_{eN}(V)$ . Согласно (1.88) они связаны между собой соотношением Эйнштейна:

$$\hat{D}_e = \frac{T_e}{e} \hat{b}_e. \quad (1.89)$$

Поток тепла:

$$\bar{q}_e = \frac{m_e}{2} \int (\vec{V} - \vec{u}_e)^2 (\vec{V} - \vec{u}_e) \left( f_0 + \frac{\vec{f}_1 \vec{V}}{V} \right) d\vec{V}. \quad (1.90)$$

Полагая направленную часть скорости малой по сравнению с тепловой, получаем

$$\bar{q}_e = \frac{2\pi m_e}{3} \int_0^\infty V^5 \vec{f}_1 dV - \frac{5}{2} n T_e \vec{u}_e. \quad (1.91)$$

Поток тепла может быть записан в виде

$$\bar{q}_e = -\hat{\kappa}_e \nabla T_e + \hat{c}^T n T_e \vec{u}_e, \quad (1.92)$$

где  $\hat{\kappa}_e$  — тензор теплопроводности, а  $\hat{c}^T$  — безразмерный тензор. Первый член здесь описывает теплопроводность, а второе слагаемое соответствует потоку тепла, обусловленному направленной скоростью. Наряду с тензором теплопроводности вводят также тензор температуропроводности  $\hat{\chi}_e$ , который связан с  $\hat{\kappa}_e$  соотношением

$$\hat{\kappa}_e = \frac{3}{2} n \hat{\chi}_e. \quad (1.93)$$

С помощью (1.84) тензоры  $\hat{\kappa}_e$  ( $\hat{\chi}_e$ ) и  $\hat{c}^T$  могут быть вычислены для конкретной зависимости  $v_{eN}(V)$ . Нетрудно показать, преобразуя (1.91), что они связаны с тензорами диффузии и термодиффузии:

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_e &= \frac{3}{2} n \hat{\chi}_e = n \left( \frac{3}{2} \hat{D}_e + \hat{D}_e^T - T_e \frac{d\hat{D}_e^T}{dT_e} + \hat{D}_e \hat{D}_e^{-1} \hat{D}_e^T \right), \\ \hat{c}^T &= \hat{D}_e^T \hat{D}_e^{-1} - \hat{I},\end{aligned}\quad (1.94)$$

где  $\hat{I}$  — единичный тензор. Коэффициенты диффузии, термодиффузии и температуропроводности являются величинами одного порядка.

Если частота столкновений  $v_{eN}$  не зависит от скорости, то выражения для коэффициентов диффузии, термодиффузии, подвижности и теплопроводности сильно упрощаются. Из (1.88), (1.94) получаем

$$\hat{D}_e = \hat{D}_e^T = \frac{T_e}{e} \hat{b}_e = \frac{3}{5} \hat{\chi}_e = \frac{T_e}{m_e v_{eN}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{ce}^2 / v_{eN}^2 + 1} & -\frac{\omega_{ce} / v_{eN}}{\omega_{ce}^2 / v_{eN}^2 + 1} & 0 \\ \frac{\omega_{ce} / v_{eN}}{\omega_{ce}^2 / v_{eN}^2 + 1} & \frac{1}{\omega_{ce}^2 / v_{eN}^2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (1.95)$$

В тех случаях, когда зависимость  $v_{eN}(V)$  слабая или не нужна высокая точность вычислений, применяют так называемую элементарную теорию (она соответствует квазигидродинамическому приближению, см. следующую главу). При этом используется выражение (1.95), в которое подставлена средняя транспортная частота столкновений  $v_{eN}(T) = \langle v_{eN}(V) \rangle = \int v_{eN}(V) f_0 d\vec{V} / n$ . Для сильного магнитного поля  $\omega_{ce} \gg v_{eN}(T)$  формула (1.95) остается точной при любой зависимости частоты столкновений от скорости, что легко проверить исходя из (1.88) и определения  $v_{eN}(T)$ . Выражения для коэффициентов более точные, чем (1.95), для произвольной степенной зависимости частоты столкновений от скорости приведены в [7].

Для ионных коэффициентов переноса обычно ограничиваются приближением элементарной теории. В важном случае ионов в собственном газе коэффициенты переноса в рамках элементарной теории даются (1.95) с частотой столкновений

$$v_{iN} = \frac{32\sigma_{ex}}{3\pi^{1/2}} \left( \frac{T_i}{m_i} \right)^{1/2} n_N.\quad (1.96)$$

### 1.7. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ДРЕЙФОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В сильном магнитном поле часто бывает целесообразно перейти к дрейфовому приближению и рассматривать газ центров ларморовских окружностей — ведущих центров. Вдоль магнитного поля ведущий центр движется со скоростью, близкой к параллельной скорости частицы  $V_{\parallel}$ , а поперек магнитного поля перемещается с дрейфовой скоростью. Выражение для скорости дрейфа ведущего центра частицы получается усреднением уравнения движения по быстрым вращениям по малой ларморовской окружности со скоростью  $V_{\perp}$ . Приведем результат этого усреднения [8]. Скорость ведущего центра:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} = & V_{\parallel} \vec{h} + \frac{mcV_{\perp}^2}{2eB} (\vec{h} \text{rot} \vec{h}) \vec{h} + \frac{c}{B^2} [\vec{E} \cdot \vec{B}] + \frac{mcV_{\perp}^2}{2eB} [\vec{h} \cdot \frac{\nabla B}{B}] + \\ & + \frac{mcV_{\parallel}^2}{eB} [\vec{h} \cdot (\vec{h} \nabla \vec{h}) \vec{h}], \end{aligned} \quad (1.97)$$

где  $\vec{h} = \vec{B}/B$ . Здесь второй член в правой части представляет собой поправку к параллельной скорости, третий — дрейф под действием электрического поля, а два последних члена — дрейфы, связанные с неоднородностью магнитного поля.

Скорости изменения параллельной и перпендикулярной скоростей даются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\parallel} = & \frac{e\vec{E}\vec{h}}{m} + \frac{V_{\perp}^2}{2} \text{div} \vec{h} + \frac{cV_{\parallel}}{B} (\vec{E} [\vec{h} \cdot (\vec{h} \nabla) \vec{h}]) - \\ & - \frac{cmV_{\perp}^2 V_{\parallel}}{2eB} \left( \frac{\nabla B}{B} [\vec{h} \cdot (\vec{h} \nabla) \vec{h}] \right) - \frac{cmV_{\perp}^2 V_{\parallel}}{2eB} \vec{h} \text{rot} (\vec{h} \nabla) \vec{h}, \\ \dot{V}_{\perp} = & - \frac{V_{\parallel} V_{\perp}}{2} \text{div} \vec{h} - \frac{cV_{\perp}}{2B} (\vec{h} \text{rot} \vec{E}) + \\ & + \frac{cV_{\perp}}{2B} (\vec{E} [\vec{h} \cdot \frac{\nabla B}{B}]) + \frac{cV_{\perp}}{2B} (\vec{E} \vec{h}) (\vec{h} \text{rot} \vec{h}) + \\ & + \frac{cmV_{\parallel}^2 V_{\perp}}{2eB} \left( \frac{\nabla B}{B} [\vec{h} \cdot (\vec{h} \nabla) \vec{h}] \right) + \frac{cmV_{\parallel}^2 V_{\perp}}{2eB} \vec{h} \text{rot} (\vec{h} \nabla) \vec{h}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Различные члены в этом выражении, связанные с электрическим полем, отражают работу электрического поля

при движении ведущего центра вдоль него и работу вихревого электрического поля над частицей, вращающейся по ларморовской окружности. Члены, связанные с неоднородностью магнитного поля, отражают изменение продольной и поперечной скорости при сохранении поперечного магнитного момента и полной энергии.

В дрейфовом приближении можно ввести функцию распределения ведущих центров, зависящую от пяти переменных, трех координат ведущего центра, продольной и поперечной скорости. Определим ее таким образом, что  $f d\vec{R} dV_{\parallel} d\vec{V}_{\perp}$  дает число частиц, координаты ведущих центров которых лежат в соответствующем элементе объема пятимерного фазового пространства. В отсутствие столкновений, рассматривая течения жидкости ведущих центров в этом пространстве, можно получить аналог уравнения Власова:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \dot{\vec{R}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{R}} + \dot{V}_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial V_{\parallel}} + \dot{V}_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial V_{\perp}} = 0. \quad (1.99)$$

Это уравнение представляет собой бесстолкновительное кинетическое уравнение в дрейфовом приближении. Дрейфовое кинетическое уравнение можно использовать и в столкновительном случае, когда можно пренебречь различием между положением частицы и положением ведущего центра.

## Глава 2. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

### 2.1. УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ

**С**истема уравнений для моментов функции распределения получается после умножения кинетического уравнения на соответствующие произведения компонент скоростей  $V_j V_k \dots V_n$  и последующего интегрирования по скоростям. В результате получается бесконечная цепочка зацепляющихся уравнений моментов. Первые пять из них получаются умножением на 1,  $m_\alpha V_j$  и  $m_\alpha V^2/2$ .

Умножение на единицу и интегрирование по скоростям приводит к уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\Gamma}_\alpha = 0. \quad (2.1)$$

Мы рассматриваем только упругие столкновения, поэтому в правой части интеграл от столкновительного члена по скоростям дает ноль — отсутствует рождение и гибель частиц. При наличии неупругих процессов соответствующие члены могут быть добавлены в правую часть. Уравнение непрерывности (2.1) описывает сохранение числа частиц.

Интегрирование с весом  $m_\alpha V_j$  приводит к трем уравнениям:

$$m_\alpha \left( \frac{\partial \Gamma_{aj}}{\partial t} + \frac{\partial M_{ajk}}{\partial x_k} \right) = Z_\alpha e n_\alpha (E_j + \frac{1}{c} [\bar{u}_\alpha \cdot \bar{B}]_j) + R_{\alpha j}. \quad (2.2)$$

Здесь моменты функции распределения

$$M_{\alpha j, k \dots n} = \int V_j V_k \dots V_n f_\alpha(\vec{r}, \vec{V}, t) d\vec{V}$$

определены согласно (1.6). Величина

$$R_{\alpha j} = \int m_{\alpha} V_j St_{\alpha} d\vec{V} \quad (2.3)$$

представляет собой силу трения. Как и столкновительный член, сила трения представляет собой сумму по частицам, с которыми происходят столкновения:

$$\vec{R}_{\alpha} = \sum \vec{R}_{\alpha\beta}.$$

Комбинируя уравнение (2.2) с уравнением неразрывности (2.1), разделяя тепловую скорость в тензоре  $M_{\alpha jk}$  на скорость хаотического движения и направленную скорость, получаем

$$\begin{aligned} m_{\alpha} n_{\alpha} \left( \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial t} + u_{\alpha k} \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} \right) = \\ = - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi_{\alpha jk}}{\partial x_k} + Z_{\alpha} e n_{\alpha} \left( E_j + \frac{1}{c} [\vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{B}]_j \right) + R_{\alpha j}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$p_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} n_{\alpha}}{3} \langle (\vec{V} - \vec{u}_{\alpha})^2 \rangle = n_{\alpha} T_{\alpha} \quad (2.5)$$

представляет собой парциальное давление, а величина

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha jk} = \pi_{\alpha kj} = \\ = m_{\alpha} n_{\alpha} \langle (V_j - u_{\alpha j})(V_k - u_{\alpha k}) - \delta_{jk} (\vec{V} - \vec{u}_{\alpha})^2 / 3 \rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

называется тензором вязкости.

Уравнение (2.4) имеет смысл уравнения движения. Левая его часть содержит субстанциальную производную, которая соответствует ускорению выделенного элемента объема среды. Правая часть есть сумма сил, действующих на этот элемент: градиента парциального давления, дивергенции тензора вязких напряжений, электрической силы, силы Лоренца и силы трения. Векторная форма уравнения (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} m_{\alpha} n_{\alpha} \left[ \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\vec{u}_{\alpha} \nabla) \vec{u}_{\alpha} \right] = \\ = -\nabla p_{\alpha} - \nabla \cdot \vec{\pi}_{\alpha} + Z_{\alpha} e n_{\alpha} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{B}] \right) + \vec{R}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При интегрировании кинетического уравнения с весом  $m_\alpha V^2/2$  получается уравнение баланса энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{m_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha \right) u_{\alpha j} + \pi_{\alpha jk} u_{\alpha k} + q_{\alpha j} \right] = \\ & = Z_\alpha e E_j u_{\alpha j} n_\alpha + R_{\alpha j} u_{\alpha j} + Q_\alpha. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\bar{q}_\alpha = \frac{m_\alpha n_\alpha}{2} \langle (\bar{V} - \bar{u}_\alpha)^2 (\bar{V} - \bar{u}_\alpha) \rangle \quad (2.9)$$

есть вектор плотности потока тепла, а

$$Q_\alpha = \int \frac{m_\alpha (\bar{V} - \bar{u}_\alpha)^2}{2} St_\alpha d\bar{V} \quad (2.10)$$

есть скорость тепловыделения в результате столкновений.

Величина тепловыделения также представляет собой сумму:  $Q_\alpha = \sum Q_{\alpha\beta}$ . В левой части уравнения баланса энергии первый член представляет собой скорость изменения энергии единицы объема, которая включает в себя энергию направленного и теплового движения. Второй член складывается из дивергенции полного потока энергии:

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{m_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha \right) \bar{u}_\alpha + \bar{q}_\alpha \right]$$

и работы сил давления и вязкости:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (p_\alpha \delta_{jk} + \pi_{\alpha jk}) u_{\alpha k} \right],$$

взятых с обратным знаком. В результате появляется коэффициент  $5/2$  перед  $n_\alpha T_\alpha$ . В правой части уравнения (2.8) кроме тепловыделения  $Q_\alpha$  содержится работа электрического поля и работа силы трения. Сила Лоренца не совершает работы, так как она перпендикулярна скорости, поэтому соответствующий член отсутствует в (2.8).

Уравнение баланса энергии может быть скомбинировано с уравнением непрерывности и с уравнением баланса сил (2.7). В результате уравнение (2.8) может быть переписано еще в двух эквивалентных видах:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha T_\alpha) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha \bar{u}_\alpha \right) + n_\alpha T_\alpha \nabla \cdot \bar{u} + \pi_{\alpha jk} \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} + \nabla \cdot \bar{q}_\alpha = Q_\alpha; \quad (2.11)$$

$$\frac{3}{2} n_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha \nabla) \right] T_\alpha + n_\alpha T_\alpha \nabla \cdot \bar{u} + \pi_{\alpha jk} \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} + \nabla \cdot \bar{q}_\alpha = Q_\alpha. \quad (2.12)$$

Эти уравнения описывают изменение внутренней энергии частиц и представляют собой уравнения баланса тепла.

Процедуру интегрирования кинетического уравнения можно продолжать, в результате чего получится бесконечная система уравнений моментов. Так как она является прямым следствием кинетического уравнения, то справедлива всегда. Однако практическое ее использование в общем случае невозможно. Действительно, чтобы определить профиль концентрации из уравнения непрерывности, надо знать направленную скорость  $\bar{u}_\alpha$ ; для нахождения  $\bar{u}_\alpha$  из уравнения баланса сил необходимо знать давление  $p_\alpha$ , вязкость  $\pi_{\alpha jk}$  и силу трения  $\bar{R}_\alpha$ ; в уравнении баланса тепла входят новые величины  $\bar{q}_\alpha$  и  $Q_\alpha$  и т. д.

Чтобы сделать систему уравнений непрерывности, баланса сил и энергии (тепла) замкнутой, необходимо выразить величины  $\pi_{\alpha jk}$ ,  $\bar{q}_\alpha$ ,  $\bar{R}_\alpha$  и  $Q_\alpha$  через  $n_\alpha$ ,  $\bar{u}_\alpha$ ,  $T_\alpha$  и их пространственные производные. Такая процедура возможна в гидродинамическом приближении, когда характерные пространственные и временные масштабы достаточно велики, а столкновения достаточно часты. Критерием является малость длины свободного пробега  $\lambda_\alpha$  или лармовского радиуса ионов  $\rho_{c\alpha}$  по сравнению с характерным масштабом изменения параметров плазмы  $L_n = |d \ln n / dx|^{-1}$  (или  $L_T = |d \ln T / dx|^{-1}$  и т. п.). Характерное время  $\tau$  должно быть велико по сравнению со временем между столкновениями  $v_\alpha^{-1}$  или обратной циклотронной частотой  $\omega_{c\alpha}^{-1}$ . Электрическое поле также должно быть мало для полностью ионизованной плазмы, например,  $E \ll E_D$ , где  $E_D$  — поле Драйвера (1.44). В неоднородном магнитном поле критерий

применимости гидродинамического описания может быть жестче, из-за дрейфа ларморовских орбит условие имеет вид  $\Delta r \ll L_n, L_T$ , где  $\Delta r$  — смещение ведущего центра между столкновениями. Отдельного рассмотрения требует область вблизи материальных границ плазмы, где концентрация частиц стремится к нулю и уменьшается масштаб  $L_n$ ; в этих областях всегда требуется кинетическое рассмотрение.

Согласно терминологии термодинамики необратимых процессов величины  $R_{\alpha\beta}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\pi_{\alpha jk}$  и  $Q_{\alpha\beta}$  называются термодинамическими «потоками»  $j_m$ , а факторы, приводящие к отклонению от равновесия  $\nabla T_\alpha$ ,  $T_\alpha - T_\beta$ ,  $\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta$  и

$$W_{\alpha jk} = \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \vec{u}_\alpha$$

называются термодинамическими «силами»  $x_n$ . Величина  $W_{\alpha jk}$  известна как тензор скорости сдвигов. В гидродинамическом приближении «потоки»  $j_m$  линейно связаны с «силами»  $x_n$ , а последние линейно выражаются через поправку  $f^1$  к максвелловской функции распределения. Общая линейная связь имеет вид

$$j_m = \sum_n L_{mn} x_n, \quad (2.13)$$

а матрица  $L_{mn}$  называется матрицей коэффициентов переноса. Таким образом, чтобы найти входящие в уравнения моментов «потоки», необходимо вычислить поправку к максвелловской функции распределения  $f^1$  и с ее помощью вычислить коэффициенты переноса. Уравнения моментов с известными коэффициентами переноса называют обычно уравнениями переноса.

## 2.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ. МЕТОД ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА

Покажем, как вычисляются коэффициенты переноса в полностью ионизованной плазме. Заряд ионов положим для простоты единицей. Будем искать функцию распределения в виде ряда

$$f_\alpha = f_\alpha^0 + f_\alpha^1 + \dots, \quad (2.14)$$

где  $f_\alpha^0$  — максвелловская функция распределения (не сдвинутая за счет направленной скорости), а  $f_\alpha^1$  — малая поправка. Для определенности рассмотрим электронную функцию распределения.

В кинетическом уравнении

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \right) \frac{\partial f_e}{\partial \vec{V}} = St_e$$

главными членами являются столкновительный член и член с магнитным полем, а остальные члены содержат малость, так как электрическое поле и градиенты малы, а процессы предполагаются медленными. Максвелловская функция распределения обращает в ноль электрон-электронный столкновительный член:

$$St_{ee}(f_e^0, f_e^0) = 0, \quad (2.15)$$

а перекрестный столкновительный член содержит малый параметр — отношение масс  $m_e/m_i$ . Так как максвелловская функция распределения зависит только от модуля скорости, то она обращает в ноль и член с магнитным полем:

$$\frac{1}{c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \frac{\partial f_e^0}{\partial \vec{V}} = 0. \quad (2.16)$$

Поэтому поправку  $f_e^1$  необходимо удерживать в столкновительном члене и члене с магнитным полем, а в остальных «малых» членах достаточно удержать только  $f_e^0$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e^0}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_e^0}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \frac{\partial f_e^0}{\partial \vec{V}} - \frac{e}{m_e c} [\vec{V} \cdot \vec{B}] \frac{\partial f_e^1}{\partial \vec{V}} = \\ = St_{ee}(f_e^0, f_e^1) + St_{ee}(f_e^1, f_e^0) + St_{ei}(f_e, f_i). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь в электрон-электронном столкновительном члене проведена линеаризация. Концентрация и температура в максвелловской функции распределения являются функциями времени. Производные от них по времени можно выразить через производные от координат с помощью уравнений моментов, взятых с соответствующей точностью. Получившееся уравнение для  $f_e^1$  является

линейным интегро-дифференциальным уравнением. Решив его, можно найти  $f_e^1$  как функцию термодинамических сил, а затем, вычисляя с ее помощью термодинамические потоки, можно получить коэффициенты переноса.

Покажем, как реализуется эта программа для однородной изотермической плазмы без магнитного поля, помещенной в постоянное однородное электрическое поле. Начнем с преобразования перекрестного столкновительного члена:

$$St_{ei} = -\frac{2\pi e^4 \Lambda}{m_e} \frac{\partial}{\partial V_j} \int U_{jk} \left( \frac{f_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial V_k} - \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial V_k} \right) d\vec{V}'. \quad (2.18)$$

Из-за малости отношения масс ионную функцию распределения в (2.18) можно положить максвелловской. Так как относительная скорость близка к скорости электронов, то в первом приближении  $U_{jk} = V_{jk}$ , где

$$V_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{V} - \frac{V_j V_k}{V^3}. \quad (2.19)$$

Сохраняя с точностью до  $m_e/m_i$  только второй член в (2.18), после интегрирования получаем

$$St_{ei} = \frac{2\pi e^4 n \Lambda}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial V_j} \left( V_{jk} \frac{\partial f_e}{\partial V_k} \right). \quad (2.20)$$

Вычислим сначала силу трения в так называемом квазигидродинамическом приближении, когда электронная функция распределения предполагается максвелловской, сдвинутой на величину  $\vec{u}_e - \vec{u}_i = \vec{u}$  (в системе отсчета, где ионная направленная скорость равна нулю). Полагая

$$f_e = f_e^0 \left( 1 + \frac{m_e}{T_e} \vec{u} \vec{V} \right),$$

используя тождество  $V_{jk} V_k = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \vec{R}_{ei}^0 &= \int m_e \vec{V} St_{ei} d\vec{V} = \frac{2\pi n e^4 \Lambda}{T_e} \int \vec{V} \frac{\partial}{\partial V_j} \left[ V_{jk} \frac{\partial}{\partial V_k} (f_e^0 \vec{u} \vec{V}) \right] d\vec{V} = \\ &= \frac{2\pi n e^4 \Lambda}{T_e} \int \vec{V} \frac{\partial}{\partial V_j} (V_{jk} f_e^0 u_k) d\vec{V}. \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$\frac{\partial V_{jk}}{\partial V_j} = -\frac{2V}{V^3}$$

имеем

$$\vec{R}_{ei}^0 = -m_e n v_{ei} \vec{u}, \quad (2.21)$$

где

$$v_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ne^4 \Lambda}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \equiv v_e \quad (2.22)$$

— усредненная частота столкновений электронов. Численный коэффициент в выражении (2.21) равен единице. Это следствие предположения о максвелловском характере функции распределения. В реальности же функция распределения электронов не является сдвинутой максвелловской, так как более быстрые электроны сталкиваются реже, чем более медленные, поэтому функция распределения деформирована и вытянута в направлении против электрического поля. В результате численный коэффициент в силе трения оказывается почти вдвое меньше.

Чтобы правильно вычислить силу трения, перейдем в систему отсчета, движущуюся со средней скоростью электронов  $\vec{u}_e$ , и произведем разбиение электрон-ионного столкновительного члена:

$$\begin{aligned} St_{ee}(f_e^0, f_i^1) + St_{ee}(f_e^1, f_e^0) + St_{ei}(f_e, f_i') = \\ = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_e^0}{\partial \vec{V}} - St_{ei}(f_e, f_i - f_i'). \end{aligned} \quad (2.23)$$

В электрон-ионном столкновительном члене добавлен и вычтен член  $St_{ei}(f_e, f_i')$ , где  $f_i'$  — ионная функция распределения, сдвинутая таким образом, чтобы средняя скорость ионов совпала со средней скоростью электронов. При этом в правой части (2.23) возникает слагаемое  $St_{ei}(f_e, f_e - f_i')$ , которое содержит малую величину  $f_i - f_i'$  и в котором, следовательно, можно положить  $f_e = f_e^0$ . Оно содержит малость  $m_e/m_i$ . Поправку  $f_i^1$  ищем в виде

$$f_i^1 = f_e^0 \Phi(\vec{V}). \quad (2.24)$$

Подставляем (2.24) в (2.23). Электрическое поле в (2.23) выражаем через силу трения из уравнения баланса сил для электронов  $en\vec{E} = \vec{R}_{ei}$ . Член  $St_{ei}(f_e^0, f_i')$  преобразуем следующим образом. Согласно (2.20)

$$St_{ei}(f_e^0, f_i') = \frac{4\pi e^4 n \Lambda}{m_e T_e} \frac{\partial}{\partial V_j} (V_{jk}^* V_k f_e^0),$$

где главная часть тензора относительных скоростей вычислена относительно ионов, имеющих скорость  $-\vec{u}$ :

$$V_{jk}^* = \frac{\delta_{jk}}{|\vec{V} + \vec{u}|} - \frac{(V_j + u_j)(V_k + u_k)}{|\vec{V} + \vec{u}|^3}.$$

Учитывая, что  $V_{jk}^*(V_k + u_k) = 0$  и  $\frac{\partial V_{jk}^*}{\partial V_j} = -\frac{2V_k}{V^3}$ , получаем

$$St_{ei}(f_e^0, f_i') = -\frac{4\pi e^4 n \Lambda}{m_e T_e} \vec{V} \vec{u} f_e^0.$$

В результате (2.23) преобразуется к виду

$$I_{ee}(\Phi) + I_{ei}(\Phi) = \frac{4\pi n e^4 \Lambda}{m_e T_e} \frac{\vec{V} \vec{u}}{V^3} f_e^0 + \frac{(\vec{R}_{ei}^0 + \vec{R}_{ei}^1)}{n T_e} \vec{V} f_e^0. \quad (2.25)$$

Сила трения разбита на два слагаемых:

$$\vec{R}_{ei} = \vec{R}_{ei}^0 + \vec{R}_{ei}^1.$$

Величина  $\vec{R}_{ei}^0$  (2.21) обусловлена максвелловской функцией распределения  $f_e^0$ , сдвинутой относительно ионов на величину  $\vec{u}$ . Вторая часть силы трения вызвана поправкой (2.24):

$$\vec{R}_{ei}^1 = \int m_e \vec{V} I_{ei}(\Phi) d\vec{V}. \quad (2.26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{ei}(\Phi) &= St_{ei}(f_e^0 \Phi, f_i'), \\ I_{ee}(\Phi) &= St(f_e^0, f_e^0 \Phi) + St_{ee}(f_e^0 \Phi, f_e^0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Уравнение (2.25) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение для поправки к функции распределения.

Мы полагаем, что концентрация, температура и средняя скорость (равная нулю в избранной системе отсчета)

определяются нулевой функцией распределения. Поэтому поправка должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int f_e^0 \Phi d\vec{V} = 0, \quad \int \vec{V} f_e^0 \Phi d\vec{V} = 0, \quad \int V^2 f_e^0 \Phi d\vec{V} = 0. \quad (2.28)$$

Из соображений векторной инвариантности решение ищем в виде

$$\Phi = A(V^2) \vec{u} \vec{V}.$$

Функцию  $A(V^2)$  удобно искать в виде разложения по полиномам Лагерра:

$$A(V^2) = \frac{m_e}{T_e} \sum_{k=1}^{\infty} a_k L_k^{3/2}(x), \quad x = \frac{m_e V^2}{2T_e}. \quad (2.29)$$

Полиномы Лагерра (Сонина) представляют собой ортогональные полиномы, которые удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^{\infty} x^m \exp(-x) L_p^m(x) L_q^m(x) dx = \frac{(p+m)!}{p!} \delta_{pq}. \quad (2.30)$$

Первые два полинома имеют значения  $L_0^m = 1$ ,  $L_1^m = m + 1 - x$ . Разложение в (2.29) начинается с  $k = 1$ , чтобы обеспечить условие (2.28). Умножая (2.25) на

$$-\frac{4}{15n} \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^{1/2} \vec{V} L_k^{3/2} \left( \frac{m_e V^2}{2T_e} \right) d\vec{V}$$

и интегрируя по скоростям, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений

$$(a_{kl} + a'_{kl}) a_l = \delta_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

где  $a_{kl}$ ,  $a'_{kl}$  — безразмерные матрицы:

$$a_{kl} = -\frac{4}{15n v_{ei}} \frac{m_e}{2T_e} \int L_k^{3/2}(x) V_{\beta} J_{ee} \left( L_l^{3/2}(x) V_{\beta} \right) d\vec{V};$$

$$a'_{kl} = -\frac{4}{14n v_{ei}} \frac{m_e}{2T_e} \int L_k^{3/2}(x) V_{\beta} J_{ei} \left( L_l^{3/2}(x) V_{\beta} \right) d\vec{V}. \quad (2.32)$$

Матрицы  $a_{kl}$  и  $a'_{kl}$  приведены в работе [9]. Обрывая ряд (2.29) и ограничиваясь первыми полиномами Лагерра, можно решить конечную алгебраическую систему (2.31)

и найти коэффициенты  $a_l$ , а следовательно, и поправку к функции распределения.

Вычисленная с учетом поправки сила трения имеет вид

$$\vec{R}_{ei} = \vec{R}_{ei}^0 + \vec{R}_{ei}^1 = -0,51nm_e v_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i). \quad (2.33)$$

Аналогичным образом вычисляются остальные «потоки» и «силы» в общем случае.

### 2.3. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Приведем сводку результатов для полностью ионизованной плазмы, полученных в работе Брагинского [9]. Ограничимся случаем однозарядных ионов  $Z = 1$  и сильного магнитного поля  $\omega_{ce} \gg v_{ei}$ ,  $\omega_{ci} \gg v_{ii}$ .

Сила трения состоит из двух частей:

$$\vec{R}_{ei} \equiv \vec{R} = \vec{R}^{\vec{u}} + \vec{R}^T. \quad (2.34)$$

Первая часть силы трения  $\vec{R}^{\vec{u}}$  связана с относительной скоростью электронов и ионов:

$$\vec{R}^{\vec{u}} = -nm_e v_{ei} (0,51\vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}), \quad \vec{u} = \vec{u}_e - \vec{u}_i. \quad (2.35)$$

Частота электрон-ионных столкновений согласно (2.22):

$$v_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ne^4 \Lambda}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}, \quad (2.36)$$

где кулоновский логарифм:

$$\Lambda = 23,4 - 1,15 \lg n + 3,45 \lg T_e, \quad T_e < 50eV;$$

$$\Lambda = 23,4 - 1,15 \lg n + 2,31 \lg T_e, \quad T_e > 50eV.$$

В выражение для кулоновского логарифма концентрацию следует подставлять в единицах CGS, а температуру — в электрон-вольтах. Вторая часть силы трения  $\vec{R}^T$  называется термосилой и зависит только от градиента электронной температуры:

$$\vec{R}^T = -0,71n \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{nv_{ei}}{\omega_{ce}} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla T_e \right]. \quad (2.37)$$

Поток тепла ионов имеет вид

$$\vec{q}_i = -\kappa_{i\parallel} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{i\perp} \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{cnT_i}{eB} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla T_i \right], \quad (2.38)$$

где коэффициенты теплопроводности вдоль и поперек магнитного поля:

$$\kappa_{i\parallel} = \frac{3,9nT_i}{m_i v_{ii}}, \quad \kappa_{i\perp} = \frac{2nT_i v_{ii}}{m_i \omega_{ci}^2}, \quad (2.39)$$

а частота ион-ионных столкновений:

$$v_{ii} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{ne^4 \Lambda}{m_i^{1/2} T_i^{3/2}}. \quad (2.40)$$

Поток тепла электронов состоит из двух частей:

$$\vec{q}_e = \vec{q}_e^T + \vec{q}_e^{\vec{u}}. \quad (2.41)$$

Поток, обусловленный теплопроводностью, имеет вид

$$\vec{q}_e^T = -\kappa_{e\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{cnT_e}{eB} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla T_e \right], \quad (2.42)$$

где

$$\kappa_{e\parallel} = \frac{3,16nT_e}{m_e v_{ei}}, \quad \kappa_{e\perp} = \frac{2nT_e v_{ei}}{m_e \omega_{ce}^2}. \quad (2.43)$$

Вторая часть электронного потока тепла вызвана относительной скоростью:

$$\vec{q}_e^{\vec{u}} = 0,71nT_e \vec{u}_{\parallel} - \frac{3}{2} \frac{nT_e}{\omega_{ce}} v_{ei} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \vec{u} \right]. \quad (2.44)$$

Источники и стоки тепла представляют собой теплообмен между электронами и ионами и джоулев нагрев, который присутствует только в электронном члене:

$$Q_i = Q_{\Delta} = \frac{3m_e}{m_i} n v_{ei} (T_e - T_i),$$

$$Q_e = -\vec{R}\vec{u} - Q_{\Delta}. \quad (2.45)$$

Тензор вязких напряжений состоит из двух частей:

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}^{\vec{u}} + \vec{\pi}^{\vec{q}}. \quad (2.46)$$

Первая часть зависит от скоростей, а вторая часть — от потоков тепла. В отсутствие магнитного поля первое слагаемое имеет вид

$$\bar{\pi}_{jk}^{\bar{u}} = -\eta_0 W_{jk} = -\eta \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \bar{u} \right), \quad (2.47)$$

В сильном магнитном поле ( $\bar{z} \parallel \bar{B}$ ):

$$\begin{aligned} \pi_{zz}^{\bar{u}} &= -\eta_0 W_{zz}, \\ \pi_{xx}^{\bar{u}} &= -\frac{\eta_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy}, \\ \pi_{yy}^{\bar{u}} &= -\frac{\eta_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2} (W_{yy} - W_{xx}) + \eta_3 W_{xy}, \\ \pi_{xy}^{\bar{u}} &= \pi_{yx}^{\bar{u}} = -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2} (W_{xx} - W_{yy}), \\ \pi_{xz}^{\bar{u}} &= \pi_{zx}^{\bar{u}} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz}, \\ \pi_{yz}^{\bar{u}} &= \pi_{xy}^{\bar{u}} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Коэффициенты вязкости для ионов:

$$\begin{aligned} \eta_{i0} &= 0,96nT_i / \nu_{ii}, \\ \eta_{i1} &= 0,3 \frac{nT_i \nu_{ii}}{\omega_{ci}^2}, \quad \eta_{i2} = 4\eta_{i1}, \\ \eta_{i3} &= \frac{nT_i}{2\omega_{ci}}, \quad \eta_{i4} = 2\eta_{i3}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Для электронов вязкость обычно несущественна. Вторая часть тензора вязких напряжений становится существенной, когда поток тепла  $\bar{q}_i$  становится порядка  $nT_i \bar{u}_i$ ; соответствующие выражения приведены в [10]. Вязкостное тепловыделение связано в основном с ионами; его главная часть:

$$Q_{vis} = -\pi_{jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\eta_0}{3} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right). \quad (2.50)$$

Численные коэффициенты для случаев многозарядных ионов и промежуточных значений магнитного поля приведены в [9]–[10].

## 2.4. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Проанализируем качественно полученные результаты для коэффициентов переноса.

### 2.4.1. СИЛА ТРЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ. ТЕРМОСИЛА

Оценку для части силы трения  $\bar{R}^{\bar{u}}$ , связанной с относительной скоростью, несложно вычислить как изменение импульса электрона относительно иона  $m_e(\bar{u}_e - \bar{u}_i)$  за время между столкновениями  $v_{ei}^{-1}$ , умноженное на концентрацию заряженных частиц  $n$ . Для движений поперек магнитного поля функция распределения электронов близка к максвелловской, сдвинутой на величину  $\bar{u}$ , так как вращение по ларморовской окружности уменьшает анизотропию функции распределения. Поправки содержат малость порядка  $v_{ei}/\omega_{ce}$ . Поэтому поперечная часть силы трения совпадает с силой трения в квазигидродинамическом приближении (2.21). В продольном же направлении из-за искажения функции распределения появляется численный коэффициент и сила трения оказывается почти вдвое меньше.

Вторая часть силы трения, пропорциональная градиенту электронной температуры, известна как термосила. Появление этой силы связано с зависимостью частоты столкновений от скорости при кулоновских столкновениях. Рассмотрим электроны с нулевой средней скоростью, сталкивающиеся с неподвижными ионами в плазме без магнитного поля. Потoki электронов через единичную площадку, расположенную при  $z = z_0$  (рис. 2.1), направлены в противоположные стороны и равны  $\Gamma_+ \sim \Gamma_- \sim nV_T$  ( $V_T$  — тепловая скорость). Так как электроны при столкновениях теряют импульс, появляются две силы,

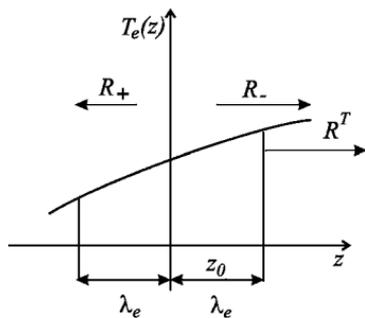


Рис. 2.1

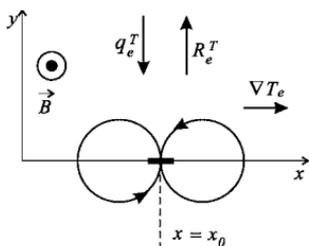


Рис. 2.2

пропорциональные соответствующим потокам  $R_+ \sim R_- \sim m_e n V_T v_{ei}$ , действующие на ионы. В плазме с однородной температурой и плотностью эти силы сбалансированы и суммарная сила равна нулю. В присутствии же градиента электронной температуры электроны, пересекающие площадку, приходят из областей с разной температурой, отличающейся на величину  $\delta T_e = (dT_e/dz)\lambda_e$ , где  $\lambda_e$  — длина свободного пробега. Поэтому  $R_+ \neq R_-$  и возникает несбалансированная сила. Если, например, температура электронов справа больше, то из-за того, что кулоновская частота столкновений падает с ростом скорости, сила  $R^+$  меньше, чем  $R^-$ . В результате возникает несбалансированная сила, вытягивающая ионы в горячую область. Величина этой силы:

$$R^T \sim m_e \frac{dv_{ei}}{dT_e} \delta T_e n V_T \sim n \frac{dT_e}{dz}. \quad (2.51)$$

По третьему закону Ньютона такая же сила с противоположным знаком действует на электроны.

Поперек сильного магнитного поля электроны вращаются по ларморовской окружности, и поэтому несбалансированная сила возникает в направлении, поперечном к градиенту температуры (рис. 2.2). Так как электроны приносят импульс с расстояний порядка ларморовского радиуса  $\rho_{ce}$ , то различие в температурах составляет  $\delta T_e = (dT_e/dz)\rho_{ce}$ . Аналогично (2.51) на ионы действует сила

$$R^T \sim n \frac{v_{ei}}{\omega_{ce}} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla T_e \right], \quad (2.52)$$

а на электроны — такая же сила с противоположным знаком.

#### 2.4.2. ПРОВОДИМОСТЬ

В однородной плазме без магнитного поля или вдоль магнитного поля электрическое поле уравнивается силой трения. В результате возникает ток, величина которого согласно (2.35) есть

$$\vec{j} = \sigma_{\parallel} \vec{E}, \quad (2.53)$$

где спитцеровская проводимость:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{ne^2}{0,51m_e v_{ei}}. \quad (2.54)$$

Так как частота кулоновских столкновений пропорциональна концентрации заряженных частиц, то проводимость полностью ионизованной плазмы не зависит от концентрации и определяется электронной температурой,  $\sigma_{\parallel} \sim T_e^{3/2}$ . Отметим, что в отличие от случая частично ионизованной плазмы в полностью ионизованной плазме отсутствует понятие подвижности — уравнение (2.53) позволяет определить лишь относительную скорость электронов и ионов, но не сами эти скорости. Это связано с отсутствием выделенной системы отсчета, связанной в слабоионизованной плазме с нейтральным газом.

В литературе часто вводится величина  $\sigma_{\perp} = ne^2/(m_e v_{ei})$ , которая, однако, не определяет реальную проводимость плазмы поперек магнитного поля. Действительно, однородное электрическое поле, приложенное поперек магнитного, всегда можно обратить в ноль в соответствии с преобразованием Лоренца за счет перехода в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $c[\vec{E} \cdot \vec{B}]/B^2$ . Поэтому однородное электрическое поле в полностью ионизованной плазме вообще не вызывает тока в поперечном направлении. В этом смысле поперечная проводимость полностью ионизованной плазмы равна нулю, так же как равны нулю поперечные (в направлении электрического поля) подвижности электронов и ионов.

### 2.4.3. ПОТОК ТЕПЛА. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, КОНВЕКТИВНАЯ ЧАСТЬ

Поток тепла, как и сила трения, состоит из двух частей. Первая часть является линейной функцией градиента температуры и обусловлена теплопроводностью. Она имеет вид

$$\vec{q}_{\alpha}^T = -\hat{\kappa}_{\alpha} \nabla T_{\alpha} = -\frac{2}{3} n \hat{\chi}_{\alpha} \nabla T_{\alpha}. \quad (2.55)$$

Оценка компонент тензора теплопроводности  $\hat{\kappa}$  и тензора температуропроводности  $\hat{\chi}$  вдоль и поперек магнитного поля производится так же, как и для частично ионизованной плазмы. Диагональные компоненты тензора температуропроводности по порядку величины оцениваются как средний квадрат случайных блужданий, умноженный на частоту столкновений. Вдоль (в отсутствие) магнитного поля

$$\chi_{e\parallel} \sim \lambda_e^2 \nu_{ei}, \quad \chi_{i\parallel} \sim \lambda_i^2 \nu_{ii}. \quad (2.56)$$

Так как длины пробега электронов и ионов при сравнимых температурах есть величины одного порядка, то  $\chi_{e\parallel} / \chi_{i\parallel} \sim \sqrt{m_i / m_e}$  — продольная теплопроводность электронов намного больше ионной. Поперек магнитного поля частицы при столкновениях смещаются на величину ларморовского радиуса, поэтому

$$\chi_{e\perp} \sim \rho_{ce}^2 \nu_{ei}, \quad \chi_{i\perp} \sim \rho_{ci}^2 \nu_{ii}. \quad (2.57)$$

Соотношение поперечных коэффициентов температуропроводности обратное —  $\chi_{i\perp} / \chi_{e\perp} \sim \sqrt{m_i / m_e}$ . Оценки потоков тепла в направлении градиентов температуры легко получаются как разность тепловых потоков, приносимых с длины пробега или ларморовского радиуса. Вдоль магнитного поля

$$q_{\alpha\parallel} \sim q_{\alpha\parallel+} - q_{\alpha\parallel-} \sim nV_T \delta T_\alpha \sim nV_T \lambda_\alpha \frac{dT_\alpha}{dz},$$

а поперек

$$q_{\alpha\perp} \sim q_{\alpha\perp+} - q_{\alpha\perp-} \sim n\rho_{c\alpha} \nu_{\alpha\alpha} \delta T_\alpha \sim n\rho_{c\alpha}^2 \nu_{\alpha\alpha} \frac{dT_\alpha}{dx}.$$

В магнитном поле появляются также холловские потоки тепла, соответствующие недиагональным компонентам тензора теплопроводности. Вдоль оси  $y$  возникает несбалансированный поток тепла через элемент площади. Односторонний поток тепла, пересекающий площадку, имеет порядок  $nV_T T$ , а его несбалансированная часть дается оценкой  $nV_T \rho_c dT/dx$ . В результате для электронов

$$\bar{q}_{e\Lambda}^T \sim -\frac{ncT_e}{eB^2} \left[ \vec{B} \cdot \nabla T_e \right]. \quad (2.58)$$

Холловский поток тепла ионов имеет противоположный знак. Поток тепла (2.58) перпендикулярен градиенту температуры, поэтому в однородном магнитном поле и при постоянной концентрации его дивергенция равна нулю, то есть этот поток не приводит к изменению температуры. В неоднородном же магнитном поле дивергенция холловского потока (2.58) отлична от нуля, что на языке дрейфов соответствует дивергенции конвективного потока тепла, связанного с перемещением ведущих центров частиц.

Для электронов в дополнение к теплопроводностному потоку существует поток тепла, связанный с относительной скоростью,  $\bar{q}_e^{\bar{u}}$  в (2.41). Так же как и у термосилы, его происхождение связано с зависимостью частоты столкновений от скорости. Искажение функции распределения электронов по сравнению со сдвинутой максвелловской функцией распределения приводит к тому, что в отсутствие магнитного поля больший вклад в относительную скорость  $\bar{u}$  вносят электроны с большими скоростями. В результате появляется поток тепла  $\bar{q}_e^{\bar{u}} \sim nT_e\bar{u}$ .

Механизм возникновения потока тепла поперек магнитного поля иллюстрируется на рис. 2.3. Сила трения, связанная с относительной скоростью, тормозит электроны, вращающиеся по ларморовской окружности, при положительных значениях  $y$ , и ускоряет — при отрицательных значениях. При этом совершаемая работа  $m_e v_{ei} u_x \rho_{ce}$  приводит к тому, что энергия электронов, пересекающих площадку сверху, меньше, чем энергия электронов, пересекающих площадку снизу. Умножая разницу в энергиях  $m_e v_{ei} u_x \rho_{ce}$  на поток частиц  $nV_T$ , получаем оценку потока тепла в направлении  $y$ :

$$\bar{q}_{e\Lambda}^{\bar{u}} \sim \frac{nT_e}{\omega_{ce}} v_{ei} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \bar{u} \right]. \quad (2.59)$$

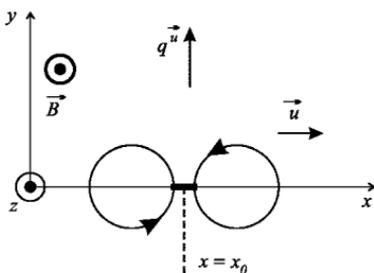


Рис. 2.3  
Тепловыделение  
при столкновениях

#### 2.4.4. ТЕПЛОЫДЕЛЕНИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Как известно, при столкновении легкой частицы с тяжелой передается доля энергии порядка отношения масс. Поэтому, оценивая долю энергии, передаваемую от электронов к ионам, как  $(3/2)n(T_e - T_i)$  за время  $v_{ei}^{-1}m_i/m_e$ , получаем для теплообмена

$$Q_{\Delta} \sim \frac{m_e}{m_i} n v_{ei} (T_e - T_i).$$

Член, ответственный за теплообмен, присутствует в уравнениях баланса тепла для ионов и электронов с разными знаками.

Член  $-\bar{R}\bar{u}$ , который имеется только в уравнении электронного теплового баланса, состоит из двух частей. Слагаемое  $-\bar{R}^{\bar{u}}\bar{u}$  представляет собой джоулево тепловыделение, его можно переписать в виде

$$-\bar{R}^{\bar{u}}\bar{u} = \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}}. \quad (2.60)$$

Знак второго слагаемого,  $-\bar{R}^T\bar{u}$ , может быть положительным или отрицательным, соответствующее тепловыделение является обратимым.

#### 2.4.5. ВЯЗКОСТЬ

Явление вязкости связано с переносом импульса. Пусть, например, в отсутствие магнитного поля и градиента температуры средняя скорость  $u_y$  меняется в направлении  $x$ . Аналогично потоку тепла разность односторонних потоков импульса  $nV_T u_y$  с расстояния порядка длины свободного пробега составляет

$$\pi_{xy} \sim \pi_{xy}^+ - \pi_{xy}^- \sim mnV_T \delta u_y \sim mnV_T \lambda \frac{du_y}{dx}.$$

Для коэффициента вязкости имеем отсюда оценку

$$\pi_{xy} = -\eta_0 \frac{du_y}{dx}, \quad \eta_0 \sim \frac{nT}{v}. \quad (2.61)$$

В выражение для коэффициента вязкости ионов входит ион-ионная частота столкновений, поэтому

$$\eta_{i0} \sim nm_i \chi_{i\parallel}. \quad (2.62)$$

Подстановка (2.61) в уравнение баланса сил для ионов (2.4) приводит к уравнению диффузии:

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

с коэффициентом диффузии  $D = T_i / (m_i \nu_{ii})$ . Таким образом, вязкость соответствует диффузии импульса в направлении градиента скорости. Аналогичным образом происходит перенос и других компонент скорости. В общем случае тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей сдвигов (2.46):  $\pi_{jk} = -\eta_0 W_{jk}$ . Тензор  $W_{jk}$  является симметричным тензором с нулевым следом  $W_{jj} = 0$ . Этот тензор обращается в нуль, если плазма вращается как целое  $\vec{u} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$  или растягивается как целое  $\vec{u} \sim \vec{r}$ . Компоненты тензора вязкости, вызванные потоками тепла, имеют тот же порядок величины, если  $\vec{q}_\alpha \sim n T_\alpha \vec{u}_\alpha$ .

В сильном магнитном поле вязкость имеет более сложный характер. Компоненты тензора вязких напряжений, содержащие коэффициенты  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , соответствуют уменьшению шага случайных блужданий поперек магнитного поля до величины ларморовского радиуса. Компоненты же, содержащие коэффициенты  $\eta_3$  и  $\eta_4$ , не зависят от частоты столкновений и аналогичны холловским членам в потоке тепла.

## 2.5. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭНТРОПИИ

Энтропия, приходящаяся на одну заряженную частицу, например на один электрон, имеет вид

$$s_e = \frac{3}{2} \ln T_e - \ln n + \text{const}. \quad (2.63)$$

Уравнение для энтропии электронов является следствием уравнений баланса тепла и уравнения непрерывности для электронов:

$$\frac{\partial n s_e}{\partial t} + \nabla \cdot (s_e n \vec{u}_e + \frac{\vec{q}_e}{T_e}) + \frac{Q_\Delta}{T_e} = \theta_e, \quad (2.64)$$

где рождение энтропии в единице объема есть

$$T_e \theta_e = -\bar{q}_e \nabla \ln T_e - \bar{R}\bar{u} - \frac{1}{2} \pi_{ejk} W_{ejk}. \quad (2.65)$$

Левая часть уравнения (2.64) описывает изменение энтропии во времени, перенос энтропии в пространстве и передачу энтропии ионам. Используя выражения для силы трения, потока тепла и вязкости из раздела 2.3, перепишем рождение энтропии в виде

$$T_e \theta_e = \frac{\kappa_{e\parallel}}{T_e} (\nabla_{\parallel} T_e)^2 + \frac{\kappa_{e\perp}}{T_e} (\nabla_{\perp} T_e)^2 + \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} + \frac{1}{2} \eta_{e0} W_{ejk} W_{ejk}. \quad (2.66)$$

Из этого выражения видно, что рождение энтропии есть существенно положительная величина. Для ионов, аналогично, имеем

$$\frac{\partial n s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i n \bar{u}_i + \frac{\bar{q}_i}{T_i}) - \frac{Q_{\Delta}}{T_i} = \theta_i, \quad (2.67)$$

$$T_i \theta_i = \frac{\kappa_{i\parallel}}{T_i} (\nabla_{\parallel} T_i)^2 + \frac{\kappa_{i\perp}}{T_i} (\nabla_{\perp} T_i)^2 + \frac{1}{2} \eta_{i0} W_{ijk} W_{ijk}. \quad (2.68)$$

Уравнение баланса суммарной энтропии  $sn = s_e n + s_i n$  имеет вид

$$\frac{\partial n s}{\partial t} + \nabla \cdot (s_e n \bar{u}_e + s_i n \bar{u}_i + \frac{\bar{q}_e}{T_e} + \frac{\bar{q}_i}{T_i}) = \theta_e + \theta_i + \theta_{ei}, \quad (2.69)$$

$$\theta_{ei} = Q_{\Delta} \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_e} \right) = \frac{3m_e}{m_i} n v_{ei} \frac{(T_e - T_i)^2}{T_e T_i}.$$

Если характерные времена переноса тепла за счет теплопроводности и тепловыделения велики по сравнению с характерным временем изменения концентрации и температуры, так что диссипативными процессами можно пренебречь, то процесс является адиабатическим. При этом уравнения для энтропии электронов и ионов упрощаются:

$$\frac{\partial n s_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (n s_{\alpha} \bar{u}_{\alpha}) = 0. \quad (2.70)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение непрерывности, поэтому величины  $n s_{\alpha}$  и  $n$  изменяются

одинаково, а следовательно, их отношение — энтропия — сохраняется. Комбинируя (2.70) с уравнением непрерывности, получаем

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \nabla) s_\alpha = 0. \quad (2.71)$$

Таким образом, при адиабатических движениях энтропия сохраняется вдоль направления движения, а следовательно, сохраняется и величина:

$$T_\alpha^{3/2} / n = \text{const}. \quad (2.72)$$

Термодинамические «потоки» и «силы», обсуждавшиеся в разделе 2.1 и связанные соотношением (2.13), называются сопряженными, если

$$\theta = \sum_m j_m x_m.$$

Из (2.66), (2.68) и (2.69) видно, что сопряженными являются «потоки»  $\vec{q}_\alpha$ ,  $\vec{R}$ ,  $\pi_{\alpha jk}$ ,  $Q_\Delta$  и «силы»  $\nabla T_\alpha / T_\alpha$ ,  $\vec{u}$ ,  $1/2 W_{\alpha jk}$ ,  $(T_e - T_i) / (T_e T_i)$  соответственно. Для кинетических же коэффициентов  $L_{mn}$ , связывающих «потоки» и «силы» согласно (2.13), выполняется соотношение

$$L_{mn}(\vec{B}) = L_{nm}(-\vec{B}),$$

которое является следствием общего принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера.

# Глава 3. КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОСТЬ И СЛОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

## 3.1. УСТАНОВЛЕНИЕ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОСТИ

Плазма является квазинейтральной средой, то есть концентрации заряженных частиц, умноженные на заряд, для положительных и отрицательно заряженных частиц совпадают с высокой точностью. В стационарном случае это следует из уравнения Пуассона, которое для однозарядных ионов имеет вид

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e). \quad (3.1)$$

Действительно, оценивая потенциал в плазме как  $T/e$ , из уравнения Пуассона имеем

$$|n_i - n_e| \sim \frac{|\phi|}{4\pi L^2} \sim \frac{T}{4\pi e L^2},$$

где  $L = |\nabla \ln n|^{-1}$  — характерный масштаб изменения концентрации. Разделив разность концентраций на любую из концентраций, получаем условие квазинейтральности:

$$\frac{|n_i - n_e|}{n} \sim \frac{r_d^2}{L^2} \ll 1. \quad (3.2)$$

Таким образом, плазма является квазинейтральной, если дебаевский радиус значительно меньше ее характерных размеров. Это условие нарушается вблизи границ плазмы, где  $L$  уменьшается. В объеме же плазмы обычно решают квазинейтральные уравнения, из которых находится самосогласованное электрическое поле, обеспечивающее квазинейтральность. Плотность заряда, которая ответственна за формирование самосогласованного элек-

трического поля, может быть при необходимости определена из уравнения Пуассона. В ряде случаев, например при протекании через плазму тока, потенциал в плазме может существенно превосходить значение  $T/e$ . В этом случае в критерий квазинейтральности (3.2) входит эффективный дебаевский радиус, в котором величина  $T/e$  заменена на соответствующую величину потенциала.

Проанализируем теперь, как происходит процесс установления квазинейтральности, если в плазме созданы различные не квазинейтральные возмущения концентраций электронов и ионов. Анализ проведем на примере простой слабоионизованной плазмы без магнитного поля, состоящей из электронов, однозарядных ионов одного сорта и нейтральных частиц. Исходной является система уравнений непрерывности для электронов и ионов, куда подставлены выражение для потока электронов (1.87) и аналогичное выражение для ионов:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_e \nabla n_e + n_e b_e \nabla \phi) = I - R, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_i \nabla n_i - n_i b_i \nabla \phi) = I - R. \quad (3.4)$$

Мы полагаем здесь температуры частиц постоянными, так что термодиффузия отсутствует. Члены в правых частях описывают парные рождение и гибель частиц. В отсутствие магнитного поля коэффициенты диффузии и подвижности являются скалярами, причем в соответствии с соотношением Эйнштейна  $D_\alpha/b_\alpha = T_\alpha/e$ . Система (3.3), (3.4) должна быть дополнена уравнением Пуассона (3.1).

Проанализируем процесс установления квазинейтральности для случая малых возмущений  $\delta n_e$ ,  $\delta n_i$ , созданных на фоне однородной плазмы с концентрацией  $n_e = n_i = n_0$ . Линеаризуем систему (3.1), (3.3), (3.4):

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} = \nabla \cdot (D_e \nabla \delta n_e - n_0 b_e \nabla \phi),$$

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = \nabla \cdot (D_i \nabla \delta n_i + n_0 b_i \nabla \phi),$$

$$\Delta \phi = 4\pi e(\delta n_e - \delta n_i). \quad (3.5)$$

Ищем решение в виде интеграла Фурье:

$$\delta n_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta n_{\alpha\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k},$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k}.$$

Подставляя в (3.5), имеем

$$\frac{\partial \delta n_{e\vec{k}}}{\partial t} = -D_e k^2 \delta n_{e\vec{k}} + b_e n_0 k^2 \phi_{\vec{k}},$$

$$\frac{\partial \delta n_{i\vec{k}}}{\partial t} = -D_i k^2 \delta n_{i\vec{k}} - b_i n_0 k^2 \phi_{\vec{k}},$$

$$-k^2 \phi_{\vec{k}} = 4\pi e (\delta n_{e\vec{k}} - \delta n_{i\vec{k}}). \quad (3.6)$$

Подставим выражение для потенциала из третьего уравнения (3.6) в первые два и будем искать зависимость от времени в виде, пропорциональном  $\exp(-i\omega t)$ . Получившаяся система алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если определитель равен нулю. При этом имеем два корня:

$$\omega_1 = -iD_e / r_d^2; \quad \omega_2 = -ik^2 D_i (1 + T_e / T_i), \quad (3.7)$$

где дебаевский радиус  $r_d = (T_e / 4\pi n e^2)^{1/2}$ . Общее решение имеет вид

$$\delta n_{e\vec{k}} = C_1 \exp(-i\omega_1 t) + C_2 \exp(-i\omega_2 t),$$

$$\delta n_{i\vec{k}} = -(b_i C_1 / b_e) \exp(-i\omega_1 t) + C_2 \exp(-i\omega_2 t). \quad (3.8)$$

При выводе учтено, что  $D_e \gg D_i$  и  $kr_d \ll 1$ . Коэффициенты  $C_1, C_2$  определяются из начальных условий:

$$C_1 = \delta n_{e\vec{k}}^0 - \delta n_{i\vec{k}}^0,$$

$$C_2 = \delta n_{i\vec{k}}^0 - b_i C_1 / b_e \delta n_{e\vec{k}}^0 \approx \delta n_{i\vec{k}}^0,$$

где  $\delta n_{e,i\vec{k}}^0 = \delta n_{e,i\vec{k}}(0)$ .

Время  $\omega_1^{-1} \ll \omega_2^{-1}$ , поэтому процесс релаксации возмущений происходит в две стадии. На первой, быстрой, стадии за время порядка  $\omega_1^{-1}$ , то есть за время диффузии электронов на масштаб порядка дебаевского радиуса, перестраивается возмущение концентрации электронов, в то

время как ионная концентрация практически не изменяется. В конце этой стадии устанавливается равенство  $\delta n_e = \delta n_i$ , таким образом, установление квазинейтральности происходит за так называемое максвелловское время:

$$\tau_M = r_d^2 / D_e = (4\pi\sigma_e)^{-1}, \quad (3.9)$$

где  $\sigma_e = enb_e$  — электронная проводимость. Второй корень  $\omega_2$  соответствует совместной эволюции электронов и ионов за счет амбиполярной диффузии, рассмотренной в следующей главе. Процесс установления квазинейтральности происходит за счет подвижности в возникающем самосогласованном электрическом поле, а не за счет диффузии. Действительно, пренебрегая диффузионными членами в уравнении (3.5), вычитая второе уравнение из первого и подставляя потенциал из уравнения Пуассона, получаем

$$\frac{\partial(\delta n_{e\bar{k}} - \delta n_{i\bar{k}})}{\partial t} = -D_e r_d^{-2} (\delta n_{e\bar{k}} - \delta n_{i\bar{k}}), \quad (3.10)$$

то есть релаксацию к квазинейтральному состоянию за максвелловское время.

Установление квазинейтральности за максвелловское время происходит в плазме с частыми столкновениями, когда  $\tau_M v_{eN} \gg 1$ . В обратном случае возникают плазменные колебания, которые затем затухают, так что квазинейтральность устанавливается за время  $v_{eN}^{-1}$ .

### 3.2. БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЙ СЛОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Вблизи материальных поверхностей нарушается приближение квазинейтральности и одновременно становится неприменимым гидродинамическое описание плазмы, так как характерный масштаб изменения концентрации  $L = |\nabla \ln n|^{-1}$  стремится к нулю. Здесь возникают слои пространственного заряда с размерами порядка дебаевского радиуса, более точный термин — размер слоя. Проанализируем сначала структуру такого слоя в отсутствие магнитного поля для случая, когда длины свободного пробега электронов и ионов много больше размера слоя.

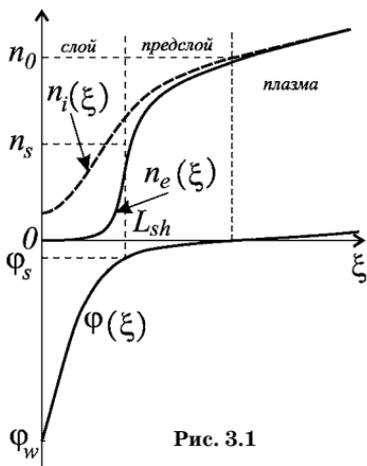


Рис. 3.1

Пусть, для определенности, стенка заряжена отрицательно относительно плазмы. Вблизи стенки, на расстоянии порядка дебаевского радиуса, расположен положительно заряженный слой пространственного заряда (рис. 3.1). Дальше на масштабе порядка длины свободного пробега притягивающихся частиц находится так называемый предслой, который разделяет слой и квазинейтральную

плазму, где применимо гидродинамическое описание. Электроны и ионы, попавшие на границу слоя, ведут себя по-разному. Ионы ускоряются в слое, поэтому все ионы, летящие в направлении стенки, на нее попадают. Значительная же часть электронов отражается от запирающего поля слоя и возвращается в плазму, и только самые энергичные достигают стенки. Чтобы понять, как формируется электронная функция распределения, рассмотрим задачу о пролете электронов через конденсатор с тормозящим электрическим полем.

### 3.2.1. ЭЛЕКТРОНЫ В КОНДЕНСАТОРЕ С ТОРМОЗЯЩИМ ПОЛЕМ

Рассмотрим конденсатор с тормозящим полем для электронов и перепадом потенциала  $\Delta\phi$  ( $\Delta\phi$  — положительная величина). Пусть справа налетают электроны, имеющие максвелловскую функцию распределения для положительных значений скоростей  $V_x$  (рис. 3.2). Часть электронов отражается от запирающего потенциала и возвращается назад, а часть преодолевает перепад потенциала и оказывается слева от конденсатора. В стационарном случае в отсутствие столкновений функция распределения в соответствии с теоремой Лиувилля должна сохраняться вдоль траектории частиц. Отсюда следует утверждение, что в бесстолкновительном случае стационарная

функция распределения есть функция интегралов движения. Так как при движении сохраняется полная энергия электрона  $E = m_e V^2/2 - e\phi$ , то функция распределения также должна быть функцией этой величины.

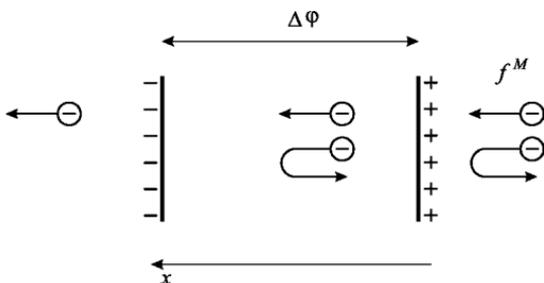


Рис. 3.2

Пусть справа функция распределения для частиц, летящих налево, максвелловская (положим здесь  $\phi = 0$ ):

$$f_+(V_x \geq 0) \equiv f^M = A \frac{m_e^{1/2}}{(2\pi T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{mV_x^2}{2T_e}\right), \quad (3.11)$$

поэтому  $f = f^M(E)$ . Преодолеть тормозящий потенциал  $\Delta\phi$  могут электроны с энергией большей, чем  $V_0 = \sqrt{2e\Delta\phi/m_e}$ , причем электроны со скоростью  $V_0$  тормозятся до нулевой скорости. Таким образом, слева от конденсатора для частиц, летящих в положительном направлении  $x$ ,

$$f_-(V_x \geq 0) = A \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right) \frac{m_e^{1/2}}{(2\pi T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{mV_x^2}{2T_e}\right). \quad (3.12)$$

Слева от конденсатора нет частиц, летящих в отрицательном направлении,

$$f_-(V_x < 0) = 0. \quad (3.13)$$

Справа же присутствуют отраженные электроны с кинетической энергией меньше, чем  $e\Delta\phi$ , и отсутствуют электроны с большей энергией — они пролетели через конденсатор. Поэтому

$$f_+(V_x < 0) = \begin{pmatrix} A \frac{m_e^{1/2}}{(2\pi T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{mV_x^2}{2T_e}\right), & |V_x| \leq V_0 \\ 0, & |V_x| > V_0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Наконец, внутри конденсатора

$$\begin{aligned}
 f_{in}(V_x \geq 0) &= A \frac{m_e^{1/2}}{(2\pi T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{m_e V_x^2 - e\phi(x)}{2T_e}\right), \\
 f_{in}(V_x < 0) &= A \frac{m_e^{1/2}}{(2\pi T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{m_e V_x^2 - e\phi(x)}{2T_e}\right), \quad |V_x| \leq V_0^*, \\
 f_{in}(V_x < 0) &= 0, \quad |V_x| > V_0^*, \\
 V_0^* &= \sqrt{\frac{2}{m_e}(\Delta\phi + \phi)}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Отметим, что концентрация электронов даже справа от конденсатора не совпадает с  $A$ , а именно оказывается меньше  $A$ . Действительно, интегрируя функцию распределения (3.12), (3.14) по скоростям, получаем

$$n_+ = \frac{A}{2} [1 + \operatorname{erf} \sqrt{e\Delta\phi/T_e}], \tag{3.16}$$

где функция ошибок определена согласно

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Концентрация электронов внутри конденсатора:

$$n_{in} = \frac{A}{2} [1 + \operatorname{erf} \sqrt{e(\phi + \Delta\phi)/T_e}] \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right). \tag{3.17}$$

Если перепад потенциала  $\Delta\phi > T_e/e$  достаточно велик, то назад отражаются почти все электроны, функция ошибок в (3.16) близка к единице, и можно считать, что  $n_+ = A$ . При этом, начиная от правой пластины, концентрация спадает вглубь конденсатора по закону Больцмана:

$$n_{in} = n_+ \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right). \tag{3.18}$$

В то же время вблизи левой пластины концентрация (3.17) не соответствует больцмановскому распределению, так как здесь мало отраженных частиц. В частности, слева от конденсатора концентрация в соответствии с (3.12):

$$n_- = \frac{A}{2} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right).$$

### 3.2.2. ПОТОКИ ЧАСТИЦ И ЭНЕРГИИ НА МАТЕРИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Нетрудно теперь вычислить потоки частиц и энергии, попадающие на стенку с границы слоя. Так как поток электронов сохраняется, то его можно вычислить, например, используя максвелловскую функцию распределения (3.11) для положительных скоростей на границе слоя (на правой обкладке конденсатора). Вклад в поток на стенку дают электроны, энергия которых превосходит  $e\Delta\phi$ .

$$\Gamma_e = \int_{V_0}^{\infty} V_x f_+ dV_x = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right). \quad (3.19)$$

Это же выражение можно получить, интегрируя поток с функцией распределения (3.15) вблизи стенки, причем интегрировать следует по всем положительным скоростям частиц. Если перепад потенциала в слое значительно больше, чем  $T_e/e$ , так что можно пренебречь отличием функции ошибок от единицы в (3.16), то поток электронов на стенку ( $n_s \equiv n_+$ )

$$\Gamma_e = \frac{n_s}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right). \quad (3.20)$$

Поток ионов на стенку можно получить, если предположить, что все ионы на границе слоя имеют одну скорость  $u_0$ , направленную к стенке. В случае  $T_e \gg T_i$  это предположение справедливо, как обсуждается ниже, ионы набирают энергию  $T_e/2$  за счет ускорения в предслое, так что  $u_0 = (T_e/m_i)^{1/2}$ . Поток ионов на границе слоя совпадает с потоком ионов на стенку, так как все ионы ускоряются в поле слоя и приходят на стенку. Поэтому

$$\Gamma_i = n_s u_0. \quad (3.21)$$

При вычислении потока энергии следует различать поток энергии, приходящий на стенку, и поток, уходящий из плазмы, — они не совпадают. Поток энергии электронов на стенку проще всего вычислить, используя функцию распределения (3.15) вблизи стенки. При этом необходима полная трехмерная функция распределения. Для  $\Delta\phi \gg T_e/e$

$$q_e = \int_0^{\infty} \frac{m_e V^2}{2} V_x \frac{n_s m_e^{3/2}}{(2\pi T_e)^{3/2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{(m_e V^2 + 2e\Delta\phi)}{2T_e}\right) dV_x dV_y dV_z = 2T_e \Gamma_e. \quad (3.22)$$

При вычислении потока энергии ионов следует учесть, что ионы в слое ускоряются и их кинетическая энергия увеличивается на величину  $e\Delta\phi$ . С учетом набранной в предслое кинетической энергии  $T_e/2$ , имеем

$$q_i = (e\Delta\phi + T_e/2)\Gamma_i. \quad (3.23)$$

Потоки энергии (3.22), (3.23) непосредственно вызывают нагрев стенки.

Чтобы вычислить поток энергии электронов на границе слоя  $q_{es}$ , уходящий из плазмы, следует проинтегрировать поток энергии по скоростям от скорости  $V_0$  до бесконечности. В результате

$$q_{es} = (e\Delta\phi + 2T_e)\Gamma_e. \quad (3.24)$$

Поток энергии ионов  $q_{is}$ , покидающий плазму, есть (в предположении малой ионной температуры)

$$q_{is} = \frac{1}{2} T_e \Gamma_i. \quad (3.25)$$

Видно, что потоки энергии электронов и ионов, в отличие от потоков тепла, не сохраняются в слое, происходит перераспределение энергии между электронами и ионами за счет работы, совершаемой электрическим полем слоя. Отметим, что при учете конечной ионной температуры поток энергии ионов существенно возрастает.

### 3.2.3. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОЯ. ПЛАВАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Для многих задач физики плазмы необходимо иметь связь между перепадом потенциала в слое пространственного заряда и током, текущим на стенку. Это соотношение, которое называют вольт-амперной характеристикой слоя, используется как граничное условие при определении распределения потенциала в объеме плазмы. Для бес-

столкновительного слоя выражение для вольт-амперной характеристики слоя следует из (3.20), (3.21). При  $e\Delta\phi \gg T_e$  ток на стенку

$$j = en_s \left[ \left( \frac{T_e}{m_i} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{T_e}{m_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right) \right]. \quad (3.26)$$

Если ток на стенку отсутствует, то стенка оказывается заряженной отрицательно относительно плазмы, а перепад потенциала в слое соответствует плавающему потенциалу. Под плавающим потенциалом находится изолированная поверхность, помещенная в плазму. В соответствии с (3.26) величина плавающего потенциала дается выражением

$$\phi_{fl} = \frac{T_e}{e} \ln\left(\frac{m_i}{2\pi m_e}\right)^{1/2}. \quad (3.27)$$

Таким образом, плавающий потенциал составляет величину порядка нескольких  $T_e/e$  (для водородной плазмы, например, порядка  $3T_e/e$ ).

### 3.2.4. СТРУКТУРА СЛОЯ. КРИТЕРИЙ БОМА

Найдем теперь распределение потенциала в слое с отрицательным перепадом потенциала. Распределение потенциала в слое описывается уравнением Пуассона:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (3.28)$$

Будем приближенно считать, что граница «плазма — слой» резкая, и на этой границе, расположенной при  $x = 0$ , плазма квазинейтральна  $n_e = n_i = n_s$  и электрическое поле отсутствует. Концентрация электронов в слое, согласно (3.18), падает в соответствии с бoльцмановским распределением. Концентрация же ионов может быть найдена из условия сохранения потока (полагаем  $\phi(x=0) = 0$ ):

$$\Gamma_i = n_s u_0 = n_i(x) \left( u_0^2 - \frac{2e\phi}{m_i} \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

Концентрация ионов в слое падает, так как они ускоряются в электрическом поле, но электронная концентрация

должна падать сильнее, чтобы обеспечить положительный пространственный заряд. Уравнение Пуассона (3.28) приобретает вид

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi en_s \left( \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) - \frac{u_0}{(u_0^2 - 2e\phi/m_i)^{1/2}} \right). \quad (3.30)$$

В безразмерных переменных

$$\Phi = -\frac{e\phi}{T_e}, \quad \xi = \frac{x}{r_d}, \quad r_d = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_s e^2}},$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = -\exp(-\Phi) + \frac{1}{(1 + \Phi/\Phi_0)^{1/2}}, \quad (3.31)$$

где  $\Phi_0 = m_i u_0^2 / 2T_e$ .

Исследуем характер решения при малых значениях  $\Phi$ . Раскладывая правую часть в ряд, получаем  $\Phi(1 - T_e/m_i u_0^2)$ . Пространственный заряд, которому пропорциональна правая часть (3.31), стремится к нулю на границе слоя, причем знак его зависит от величины  $u_0$ . Если  $u_0 < (T_e/m_i)^{1/2}$ , что соответствует отрицательному пространственному заряду, то решение уравнения Пуассона (3.31) имеет колебательный характер и не удастся построить решение, соответствующее отрицательному перепаду потенциала в слое и, следовательно, положительному пространственному заряду. Если же  $u_0 \geq (T_e/m_i)^{1/2}$ , то существует монотонное решение, соответствующее потенциалу. Условие

$$u_0 \geq (T_e/m_i)^{1/2} \quad (3.32)$$

известно как критерий Бома.

Разделение на слой и плазму является, конечно, условным. В реальности плазма и слой плавно переходят друг в друга за счет существования предслоя с масштабом длины свободного пробега притягивающихся частиц. Величина  $u_0$  зависит от конкретной плазменной задачи и характера столкновений. Для ее точного определения необходим кинетический анализ. Такой анализ дает значение  $u_0$ , близкое к

$$u_0 = (T_e/m_i)^{1/2}. \quad (3.33)$$

Покажем, как это следует из упрощенного гидродинамического описания. Рассмотрим одномерное стационарное течение плазмы к границе. Складывая уравнения баланса сил для электронов и ионов и пренебрегая электронной инерцией и электрон-нейтральными столкновениями, имеем в плазме

$$m_i n u_i \frac{du_i}{dx} = -\frac{d(p_e + p_i)}{dx} - m_i v_{iN} u_i \quad (3.34)$$

или, с учетом уравнения неразрывности для ионов:

$$\left(1 - \frac{c_s^2}{u_i^2}\right) \frac{du_i}{dx} = -v_{iN}. \quad (3.35)$$

Здесь  $c_s = (dp/d\rho)^{1/2}$  — скорость звука в плазме,  $p = p_e + p_i$ ,  $\rho = n m_i$ . Из уравнения (3.35) видно, что ионы ускоряются до скорости звука, при которой в уравнении имеется особенность и ускорение обращается в бесконечность (в реальности ускорение остается конечным и происходит на последней длине свободного пробега). В рассматриваемом нами случае  $T_e \gg T_i$  значение  $c_s$  совпадает с величиной  $u_0$  (3.33).

Уравнение (3.31) представляет собой аналог уравнения Ньютона. Умножая обе его части на  $d\Phi/d\xi$  и интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 + W(\Phi) = 0, \quad (3.36)$$

где «потенциальная энергия», известная как потенциал Сагдеева, есть

$$W(\Phi) = 1 - \exp(-\Phi) - 2\Phi_0(\Phi/\Phi_0 + 1)^{1/2} + 2\Phi_0. \quad (3.37)$$

Решение (3.36) для  $\Phi_0 = 1/2$  имеет вид

$$d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{\sqrt{(1+2\Phi')^{1/2} - 2 + \exp(-\Phi')}}. \quad (3.38)$$

При больших перепадах потенциала в слое, полагая  $\Phi \gg 1$ , имеем распределение потенциала, соответствующее закону Чайльда — Ленгмюра:

$$\xi = \frac{2^{5/4}}{3} \Phi^{3/4}. \quad (3.39)$$

Подставляя полный перепад потенциала и размер слоя в (3.39) и переходя к исходным переменным, получаем связь между размером слоя и перепадом потенциала в нем:

$$L_{sh} = \frac{2^{5/4}}{3} r_d \left( \frac{e\Delta\phi}{T_e} \right)^{3/4}. \quad (3.40)$$

Таким образом, размер слоя оказывается порядка дебаевского радиуса. В случае слоя, отталкивающего ионы, анализ проводится аналогично.

### 3.3. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ. ДВОЙНОЙ СЛОЙ

Структура бесстолкновительного слоя изменяется, если появляется дополнительный поток электронов со стенки, вызванный термоэмиссией или вторичной электронной эмиссией. Пусть эмитируются электроны с максвелловской функцией распределения и температурой  $T_{ec}$ , которая предполагается намного меньшей, чем температура плазменных электронов  $T_{eh}$ . Ограничимся случаем плавающего потенциала стенки.

Эмитируемые электроны частично нейтрализуют положительный пространственный заряд слоя, таким образом понижая перепад потенциала в слое и увеличивая поток горячих электронов плазмы на стенку. Для небольшого потока холодных электронов  $\Gamma_{ec}$  имеем условие отсутствия тока:

$$\Gamma_{eh} - \Gamma_{ec} = \Gamma_i, \quad (3.41)$$

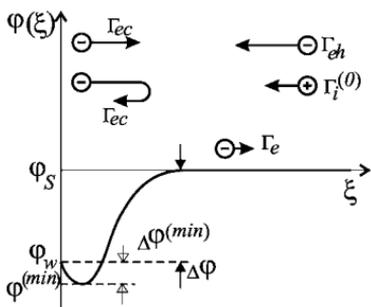


Рис. 3.3

где потоки  $\Gamma_{eh}$  и  $\Gamma_i$  определены согласно (3.10), (3.21). Соотношение (3.41) определяет перепад потенциала в слое как функцию эмиссионного потока  $\Gamma_{ec}$ .

Дальнейшее увеличение потока холодных электронов приводит к формированию

вблизи стенки области отрицательного пространственного заряда, который частично запирает поток холодных электронов. Возникает так называемый «виртуальный катод» и формируется двойной слой с минимумом потенциала вблизи электрода (рис. 3.3). Отрицательный пространственный заряд и отрицательный перепад потенциала ограничивают поток холодных электронов, так что только часть потока  $\Gamma_{ec} = \Gamma_{ec}^{(0)}$  попадает через двойной слой в плазму. Перепад потенциала  $\Delta\phi^{\min}$  между стенкой и минимумом потенциала связан с потоком холодных электронов, попадающих в плазму, соотношением

$$\Gamma_{ec}^{(0)} = \Gamma_{ec} \exp(-e\Delta\phi^{\min}/T_{ec}),$$

поэтому величина  $\Delta\phi^{\min}$  должна быть порядка нескольких  $T_{ec}/e$ . Так как  $T_{ec} \ll T_{eh}$ , то перепадом потенциала  $\Delta\phi^{\min}$  по сравнению с перепадом потенциала  $\Delta\phi$  в двойном слое между плазмой и стенкой можно пренебречь.

В двойном слое необходимо решать уравнение Пуассона:

$$d^2\phi/dx^2 = 4\pi e(n_{eh} + n_{ec} - n_i). \quad (3.42)$$

Концентрации частиц в правой части выразим как функцию потенциала. Ионная плотность по-прежнему определяется (3.29), где  $n_s$  — концентрация ионов на плазменной границе двойного слоя. Концентрация горячих электронов должна быть описана более аккуратно, чем бальцмановское распределение, так как перепад потенциала в двойном слое существенно меньше плавающего потенциала. Поэтому надо использовать функцию распределения (3.5), (3.6). Согласно (3.7)

$$n_{eh}(\Phi) = \frac{1}{2} A \exp(-\Phi) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\Phi^{(\min)} - \Phi})], \quad (3.43)$$

где  $\Phi = -e\phi/T_{eh}$ . Холодные электроны ускоряются в двойном слое, поэтому в пренебрежении их начальной энергией

$$\begin{aligned} n_{ec}(\Phi) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{T_{eh}(\Phi^{(\min)} - \Phi)}{T_{ec}}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{T_{eh}(\Phi^{(\min)} - \Phi)}{T_{ec}}}\right)\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n_{ec}(\Phi^{(\min)}) \sqrt{\frac{T_{ec}}{T_{eh}(\Phi^{(\min)} - \Phi)}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где  $n_{ec}(\Phi^{(\min)})$  представляет собой концентрацию холодных электронов в минимуме потенциала, она связана с потоком холодных электронов соотношением

$$\Gamma_{ec}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n_{ec}(\Phi^{(\min)}) \sqrt{\frac{T_{ec}}{m_e}}. \quad (3.45)$$

Интегрируем уравнение Пуассона с учетом того факта, что на границах двойного слоя электрическое поле обращается в ноль:

$$\int_0^{\Phi^{(\min)}} (n_{eh} + n_{ec} - n_i) d\Phi = 0. \quad (3.46)$$

Комбинируя это условие с (3.43)–(3.44) и выражением для концентрации ионов (3.29), используя условие нулевого тока (3.41), принимая во внимание условие квазинейтральности  $n_{ehs} + n_{ecs} = n_s$  на плазменной стороне, получим уравнение для перепада потенциала в двойном слое при плавающей стенке:

$$\exp(-\Delta\Phi_{fl}) = \frac{1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\Delta\Phi_{fl}})(1-a)}{1 + \frac{a}{\sqrt{\pi\Delta\Phi_{fl}}}}; \quad a = \frac{m_i u_0^2}{T_{eh}} \left( \sqrt{1 + \frac{2T_{eh}}{m_i u_0^2} \Delta\Phi_{fl}} - 1 \right), \quad (3.47)$$

где  $\Delta\Phi_{fl} = e\Delta\Phi_{fl}/T_e$ . Здесь мы пренебрегли членами, содержащими  $(m_e/m_i)^{1/2}$ . Для  $T_{he} \gg T_i$  с учетом критерия Бома  $m_i u_0^2 = T_{eh}$  получаем  $\Delta\Phi_{fl} = 0,95$ . Видно, что перепад потенциала в двойном слое, возникающем при сильной электронной эмиссии, действительно существенно понижается по сравнению с плавающим потенциалом (3.47).

Двойные слои могут возникать не только вблизи эмитирующего электрода, но и в различных других ситуациях, в частности, на границе раздела двух различных плазм, так что их роль в физике плазмы фундаментальна.

### 3.4. СЛОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Структура слоя для нормального или почти нормального к поверхности магнитного поля не изменяется по сравнению с ситуацией без магнитного поля, в то время как для наклонного или параллельного поверх-

ности магнитного поля структура слоя существенно меняется. Причина заключается в следующем: если дебаевский радиус меньше, чем ларморовские радиусы частиц, то вблизи стенки образуется так называемый магнитный предслой (рис. 3.4) размером порядка ларморовского радиуса. Для отрицательно заряженной стенки это ларморовский радиус ионов.

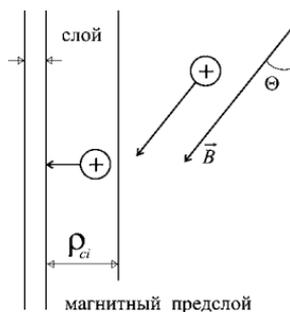


Рис. 3.4

Рассмотрим общую ситуацию в наклонном магнитном поле, образующем угол  $\Theta$  со стенкой. На расстоянии порядка ионного ларморовского радиуса ионы попадают на отрицательно заряженную стенку за время порядка обратной циклотронной частоты  $\omega_{ci}^{-1}$ . При этом их функции распределения сильно отличаются в зависимости от того, пересекают или не пересекают их орбиты стенку. На орбитах, пересекающих стенку, концентрация ионов падает, так как эти орбиты пополняются за счет более медленного прихода ионов вдоль магнитного поля. По мере приближения к стенке количество орбит, пересекающих стенку, растет, а концентрация на них уменьшается. Вблизи стенки на границе слоя практически все орбиты пополняются за счет прихода ионов вдоль магнитного поля. Концентрацию  $n_s$  здесь можно оценить, приравнявая тепловой поток ионов  $n_s(T/m_i)^{1/2}$ , нормальной компоненте ионного потока, приходящего из плазмы:  $n(T/m_i)^{1/2}\sin\Theta$ . В результате концентрация  $n_s \sim n\sin\Theta$  на границе слоя оказывается существенно меньшей, чем на внешней границе магнитного предслоя. Особенно велик перепад концентрации в предслое при малых углах  $\Theta$ , когда силовая линия почти параллельна стенке.

Электроны в предслое заперты, и профиль потенциала здесь соответствует больцмановскому распределению для электронов. Перепад потенциала в предслое поэтому значителен:  $\Delta\phi_{ps} = (T_e/e)\ln n/n_s = (T_e/e)\ln(\sin^{-1}\Theta)$ . Расчет профиля концентрации внутри предслоя довольно сложен, так как для этого необходимо решать кинетическую

задачу. Тем не менее нетрудно сформулировать вольт-амперную характеристику слоя и предслоя вместе, отсчитывая перепад потенциала до стенки от внешней границы предслоя. Нормальный поток электронов на стенку представляет собой проекцию потока вдоль магнитного поля:

$$\Gamma_e = \frac{n \sin \Theta}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right). \quad (3.48)$$

Поток ионов в стационарном случае сохраняется и совпадает с нормальной компонентой потока на правой границе магнитного предслоя:

$$\Gamma_i = n \sin \Theta \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}. \quad (3.49)$$

Скорость ионов в (3.49) соответствует критерию Бома. Вольт-амперная характеристика оказывается, таким образом, обобщением (3.26):

$$j = en \sin \Theta \left[ \left(\frac{T_e}{m_i}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{T_e}\right) \right]. \quad (3.50)$$

При очень малых углах наклона это выражение, однако, становится неприменимым. Дело в том, что при малых углах  $\Theta$  заполнение орбит ионов, пересекающих стенку, происходит не за счет прихода ионов вдоль магнитного поля, а за счет перехода ионов с орбит, не пересекающих стенку, в результате ион-нейтральных и ион-ионных столкновений. При этом орбиты, пересекающие стенку, остаются почти пустыми, так как время «опустошения» (ухода на стенку) составляет  $\omega_{ci}^{-1}$ , а время заполнения —  $v_i^{-1}$ . Поток ионов на стенку равен потоку ионов на выходящие на стенку орбиты. Последний поток по порядку величины оценивается как

$$\Gamma_i \sim n \rho_{ci} v_i. \quad (3.51)$$

Точное выражение для потока (3.51) как в частично, так и в полностью ионизованной плазме можно найти в [7]. Таким образом, вольт-амперная характеристика (3.50) справедлива при углах наклона  $\Theta > v_i/\omega_{ci}$ . При меньших углах наклона анализ становится более сложным [7].

## Глава 4. ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 4.1. УРАВНЕНИЕ АМБИПОЛЯРНОЙ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим простую (состоящую из ионов одного сорта и электронов) плазму с постоянными и однородными температурами частиц. Нейтральный газ также предполагаем однородным. Выберем систему отсчета, в которой нейтральный газ покоится:  $u_N = 0$ . Используя условие квазинейтральности, из (3.3)–(3.4) получаем исходные уравнения для определения концентрации и потенциала:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_e \nabla n + n b_e \nabla \phi) &= I - R, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_i \nabla n - n b_i \nabla \phi) &= I - R.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Потенциал исключается из этой системы уравнений. Умножая первое уравнение на  $b_i$ , а второе на  $b_e$ , складывая первое и второе уравнения, получаем уравнение амбиполярной диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \Delta n = I - R.\quad (4.2)$$

Коэффициент амбиполярной диффузии:

$$D_a = \frac{D_e b_i + D_i b_e}{b_e + b_i}.\quad (4.3)$$

С учетом соотношения Эйнштейна имеем

$$D_a = D_i (1 + T_e / T_i).\quad (4.4)$$

Уравнение амбиполярной диффузии позволяет найти распределение концентрации независимо от распределения потенциала. При этом необходимо задать граничное условие на ограничивающих материальных поверхностях. Для этого поступим следующим образом: поток ионов на границе пристеночного слоя, как обсуждалось в предыдущей главе, должен быть порядка  $\Gamma = n_s \sqrt{T_e/m_i}$ . С другой стороны, этот же поток в плазме определяется амбиполярной диффузией и согласно (4.2)  $\Gamma \sim nD_a/L$ , где  $L$  — характерный размер плазмы, а  $n$  — концентрация внутри плазмы. Приравнивая потоки, получаем оценку для концентрации на границе слоя ( $\lambda_{iN}$  — длина свободного пробега ионов):

$$n_s/n \sim \lambda_{iN}/L \ll 1. \quad (4.5)$$

Поэтому при решении уравнения амбиполярной диффузии на границе со стенкой можно считать концентрацию нулевой, так что граничное условие есть

$$n|_s = 0. \quad (4.6)$$

Распределение потенциала найдем, вычитая одно уравнение в (4.1) из другого. При этом получаем равенство дивергенций потоков частиц:

$$\nabla \cdot \vec{\Gamma}_e = \nabla \cdot \vec{\Gamma}_i \quad (4.7)$$

или условие отсутствия дивергенции плотности тока:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (4.8)$$

Для потенциала имеем уравнение

$$\nabla \cdot [n(b_e + b_i)\nabla\phi] = \nabla \cdot [(D_e - D_i)\nabla n]. \quad (4.9)$$

Потенциал, который удовлетворяет уравнению (4.9), можно представить в виде суммы

$$\phi = \phi_d + \phi_e. \quad (4.10)$$

Диффузионная часть потенциала  $\phi_d$  определяется градиентом концентрации плазмы и соответствует равенству потоков электронов и ионов  $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i$ . Равенство потоков имеет вид

$$-D_e \nabla n + b_e n \nabla \phi_d = -D_i \nabla n + b_i n \nabla \phi_d, \quad (4.11)$$

откуда находим

$$\phi_d = \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \ln n + \text{const} \approx \frac{T_e}{e} \ln n + \text{const}. \quad (4.12)$$

Вторая часть потенциала  $\phi_c$  соответствует протеканию сквозного тока и удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot [n(b_e + b_i) \nabla \phi_c] = 0. \quad (4.13)$$

Эти явления рассмотрены в главе 6, здесь же мы ограничимся случаем отсутствия сквозного тока  $\phi_c = 0$ . В этом случае потенциал (4.12) соответствует больцмановскому распределению для электронов.

**Рис. 4.1**

Поляризация сгустка плазмы в процессе амбиполярной диффузии:

*a* —  $j = 0, \phi = \phi_d$ ; *б* — дополнительная поляризация  $\phi_c$ , вызванная током.



Поляризация положительного возмущения концентрации приведена на рис. 4.1*а*. Физический механизм возникновения такой поляризации состоит в следующем: электроны с большим коэффициентом диффузии стремятся диффундировать с большой скоростью. При этом из-за требования квазинейтральности возникает электрическое поле, тормозящее электроны и выравнивающее потоки электронов и ионов. Так как  $D_e \gg D_i$ , то электрическое поле почти нацело тормозит электроны, и возникающий потенциал соответствует больцмановскому распределению для электронов. Поток ионов возрастает в  $(1 + T_e/T_i)$  раз по сравнению с униполярным (при отсутствии электрических полей) диффузионным потоком ионов до величины  $\bar{\Gamma} = -D_a \nabla n$ . Таким образом, эволюция концентрации, описываемая уравнением амбиполярной диффузии, происходит с равными потоками электронов и ионов.

Если же через плазму протекает ток, то возникает дополнительная поляризация, приведенная на рис. 4.1*б*. Действительно, в одномерном случае из (4.13) следует

$$-\nabla \phi_c = \bar{j} / ne(b_e + b_i), \quad (4.14)$$

где  $\vec{j}$  — сохраняющийся ток. Поэтому электрическое поле, связанное с протеканием тока, падает внутри положительного возмущения концентрации. Протекание тока, однако, в случае простой плазмы, содержащей ионы одного сорта, не влияет на эволюцию профиля концентрации, которая описывается уравнением амбиполярной диффузии (4.2).

## 4.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ДИФFUЗИОННЫХ ЗАДАЧ

### 4.2.1. РАСПАД НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим распад произвольного начального возмущения. Ищем решение уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \Delta n = 0 \quad (4.15)$$

с граничными условиями:

$$n(r \rightarrow \infty) = n_0, \phi(r \rightarrow \infty) = 0.$$

В качестве начального условия выберем Гауссов профиль:

$$\delta n(\vec{r}, t=0) = \frac{N}{\pi^{3/2} a^3} \exp(-r^2/a^2), \quad (4.16)$$

где  $N$  — полное число частиц, внесенное в плазму. Решение ищем в виде интеграла Фурье:

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta n_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k}. \quad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.15), получаем уравнение для Фурье-образа:

$$\frac{\partial \delta n_{\vec{k}}}{\partial t} + D_a k^2 \delta n_{\vec{k}} = 0, \quad (4.18)$$

откуда

$$\delta n_{\vec{k}} = \delta n_{\vec{k}}(0) \exp(-D_a k^2 t).$$

Возмущение концентрации согласно (4.17):

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta n_{\vec{k}}(0) \exp(-D_a k^2 t) \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k}. \quad (4.19)$$

Применяя обратное преобразование Фурье

$$\delta n_{\vec{k}} = \int \delta n(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.20)$$

к начальному возмущению концентрации (4.16), найдем

$$\delta n_{\vec{k}}(0) = N \exp(-a^2 k^2 / 4). \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.19) и интегрируя, получим

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{N}{\pi^{3/2} (a^2 + 4D_a t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2 + 4D_a t}\right]. \quad (4.22)$$

Решение (4.22) соответствует диффузионному расплыванию начального возмущения. На временах больших, чем  $a^2/4D_a$ , характерный масштаб неоднородности растет как  $\sqrt{4D_a t}$ , ее концентрация падает как  $t^{-3/2}$ , что соответствует сохранению полного числа частиц.

Потенциал плазмы относительно бесконечности легко вычислить, используя больцмановское распределение для электронов (4.12):

$$\phi = \frac{T_e}{e} \ln\left(\frac{\delta n + n_0}{n_0}\right). \quad (4.23)$$

#### 4.2.2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СТОЛБ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Найдем стационарный профиль концентрации в бесконечном цилиндре радиуса  $a$ , в котором источником плазмы является ионизация электронным ударом, а заряженные частицы уходят на стенку в результате амбиполярной диффузии. В пренебрежении рекомбинацией баланс частиц описывается уравнением

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r D_a \frac{dn}{dr}) = n Z. \quad (4.24)$$

Величина  $Z$  представляет собой число актов ионизации в единицу времени, производимых одним электроном.

Уравнение (4.24), дополненное граничным условием на стенках цилиндра  $n(r = a) = 0$  и условием ограниченности при  $r = 0$ , представляет собой задачу Штурма — Лиувилля на собственные функции и собственные значения. Так

как (4.24) является уравнением Бесселя, то его решение, ограниченное в нуле, выражается через функцию Бесселя:

$$n(r) = n(0)J_0(r\sqrt{Z/D_a}). \quad (4.25)$$

Нулевое граничное условие на стенках цилиндра определяет величину  $Z$ :

$$Z = \frac{(2,4)^2 D_a}{a^2}, \quad (4.26)$$

где число 2,4 соответствует первому корню функции Бесселя. Другие корни приводят к отрицательным значениям концентрации плазмы и не соответствуют физически осмысленному решению. Профиль концентрации, таким образом, описывается выражением

$$n(r) = n(0)J_0(2,4r/a). \quad (4.27)$$

Потенциал плазмы соответствует больцмановскому распределению для электронов:

$$\phi = \Delta\phi - \frac{T_e}{e} \ln[n(0)/n]. \quad (4.28)$$

Перепад потенциала  $\Delta\phi$  между центром и стенкой состоит из двух слагаемых — перепада потенциала в плазме и перепада потенциала в слое. Перепад потенциала между центром и границей слоя:

$$\Delta\phi_{pl} = \frac{T_e}{e} \ln[n(0)/n_s].$$

Перепад потенциала в слое находится из условия равенства потока электронов (3.20) и потока ионов на стенку:

$$\Delta\phi_{sh} = \frac{T_e}{e} \ln \left[ \frac{n_s T_e^{1/2}}{(2\pi m_e)^{1/2} \Gamma_i(a)} \right].$$

Поток ионов на стенку, используя (4.27), выразим через концентрацию в центре:

$$\Gamma_i(a) = \frac{2,4 D_a n(0)}{a} J_1(r/a). \quad (4.29)$$

В результате имеем

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{pl} + \Delta\phi_{sh} = \frac{T_e}{e} \ln \left( \frac{T_e^{1/2} a}{\alpha m_e^{1/2} D_a} \right), \quad (4.30)$$

где численный коэффициент  $\alpha = 2,4 J_1(2,4) (2\pi)^{1/2} = 3,1$ .

### 4.2.3. ДИФфуЗИОННЫЙ РАСПАД ПЛАЗМЫ

Распад плазмы в пренебрежении рекомбинацией в ограниченном цилиндре длиной  $L$  и радиусом  $a$  описывается уравнением (4.15) с нулевыми граничными условиями на стенках. Решение получается методом разделения переменных и имеет вид

$$n(r, z, t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} A_{jk} \exp(-t/\tau_{jk}) J_0(\xi_k r/a) \sin(j\pi z/L), \quad (4.31)$$

где постоянная распада

$$\frac{1}{\tau_{jk}} = \frac{D_a \xi_k^2}{a} + \frac{j^2 \pi^2}{L^2}, \quad (4.32)$$

а коэффициенты  $A_{jk}$  определяются начальными условиями. Так как последовательность корней функции Бесселя  $\xi_k$  быстро возрастает, то на больших временах в плазме устанавливается основная диффузионная мода:

$$n(r, z, t) = n(0) \exp(-t/\tau_{11}) J_0(2.4r/a) \sin(\pi z/L). \quad (4.33)$$

### 4.2.4. ДИФфуЗИОННЫЙ ЗОНД

Для диагностики плазмы широко используют измерение вольт-амперной характеристики зонда — небольшого электрода, помещенного в плазму. Будем полагать, что длины свободного пробега электронов и ионов и толщина слоя меньше размеров зонда. Такой зонд называется диффузионным (случай больших длин свободного пробега соответствует ленгмюровскому зонду). Профиль концентрации вблизи диффузионного зонда описывается уравнением амбиполярной диффузии, которое в отсутствие ионизации и рекомбинации сводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta n = 0 \quad (4.34)$$

с граничными условиями

$$n|_s = 0; \quad n(r \rightarrow \infty) = n_0.$$

Для сферического зонда радиуса  $a$  решение (4.34), удовлетворяющее граничным условиям, есть

$$n = n_0(1 - a/r). \quad (4.35)$$

При большом отрицательном потенциале зонда электронный ток на зонд равен нулю. Электрическое поле в плазме запирает электроны и увеличивает ионный поток до величины  $\vec{\Gamma}_i = -D_a \nabla n$ . Используя профиль (4.35), найдем поток на поверхности зонда  $\Gamma_i(a) = D_a n_0/a$ . Умножая поток на площадь зонда и на заряд электрона, получим ионный ток насыщения:

$$I_i^{sat} = 4\pi e n_0 D_a a. \quad (4.36)$$

Для зонда более сложной формы выражение для тока насыщения можно получить, используя электростатическую аналогию. Задача о нахождении профиля потенциала вблизи уединенного металлического тела также описывается уравнением Лапласа с постоянным потенциалом на поверхности проводника. Ионный ток насыщения пропорционален нормальной компоненте градиента концентрации (ионного потока), проинтегрированного по поверхности зонда. Интеграл же по поверхности проводника от градиента потенциала в электростатической задаче пропорционален заряду проводника, т. е. его электрической емкости  $C$ . Поэтому ионный ток насыщения на зонд выражается через его емкость:

$$I_i^{sat} = 4\pi e n_0 D_a C. \quad (4.37)$$

Выражение для емкости проводника, имеющего форму эллипсоида вращения с полуосями  $a, a, b$ , приведено, например, в [11]:

$$C = \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{Arch}(b/a)}; & b > a, \\ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\arccos(b/a)}; & a > b. \\ a; & a = b. \end{cases} \quad (4.38)$$

Аналогичным образом вычисляется и электронный ток насыщения. При больших положительных потенциалах зонда

$$I_e^{sat} = 4\pi e n_0 D_e (1 + T_i/T_e) C. \quad (4.39)$$

# Глава 5. ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

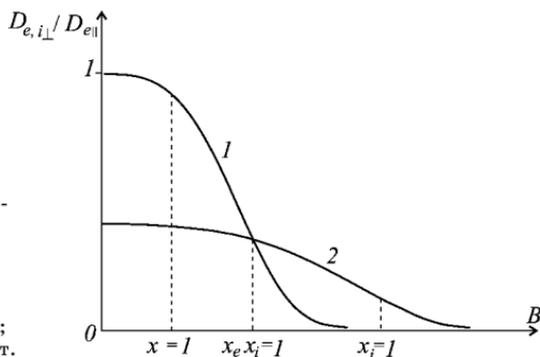
## 5.1. ДИФФУЗИЯ И ПОДВИЖНОСТЬ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исходными уравнениями для описания диффузии плазмы с постоянными температурами электронов и ионов в магнитном поле являются уравнения неразрывности для электронов и ионов с потоками вида (1.87):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_e \nabla n - \hat{b}_e n \nabla \phi) &= I - R; \\ \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_i \nabla n + \hat{b}_i n \nabla \phi) &= I - R. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тензоры диффузии и подвижности будем использовать в приближении элементарной теории (1.95). Их зависимость от величины магнитного поля приведена на рис. 5.1. Используются следующие обозначения:

$$x_e = \frac{\omega_{ce}}{v_{eN}}; \quad x_i = \frac{\omega_{ci}}{v_{iN}}.$$



**Рис. 5.1**  
Зависимость поперечных коэффициентов диффузии от магнитного поля:  
1 — электронный коэффициент диффузии;  
2 — ионный коэффициент.

С ростом магнитного поля вначале достигается значение  $x_e = 1$ . При  $x_e \gg 1$  коэффициент диффузии  $D_{e\perp} = D_{e\parallel}/(1+x_e^2)$  начинает спадать как  $B^{-2}$ . Говорят, что при этом электроны замагничены. Так как величина  $x_i \ll x_e$ , то при  $x_e = 1$  поперечный коэффициент диффузии ионов практически равен продольному коэффициенту диффузии. При дальнейшем увеличении магнитного поля при  $x_e x_i = 1$  и равных температурах электронов и ионов их поперечные коэффициенты диффузии сравниваются. При этом значение  $x_i \ll 1$ . При

$$x_e x_i \gg 1 \quad (5.2)$$

ионный поперечный коэффициент диффузии становится больше электронного (такое же неравенство в силу соотношения Эйнштейна имеет место и для подвижностей) и говорят, что плазма становится замагниченной. И, наконец, при  $x_i \gg 1$  замагниченными становятся ионы и ионный поперечный коэффициент диффузии начинает спадать с ростом магнитного поля как  $B^{-2}$ .

Обсудим физический смысл коэффициентов диффузии и подвижности в сильном магнитном поле, когда электроны и ионы замагничены. В тензоре диффузии ( $\alpha = i, e$ )

$$\hat{D}_\alpha = \begin{pmatrix} D_{\alpha\perp} & \pm D_{\alpha\perp} & 0 \\ \mp D_{\alpha\perp} & D_{\alpha\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\alpha\parallel} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

диагональные поперечные коэффициенты диффузии в сильном магнитном поле равны

$$D_{\alpha\perp} = \frac{T_\alpha v_{\alpha N}}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2} \sim \rho_{c\alpha}^2 v_{\alpha N}. \quad (5.4)$$

Таким образом, поперечные коэффициенты диффузии заряженных частиц оказываются порядка произведения квадрата ларморовского радиуса (квадрата шага случайных блужданий) и частоты столкновений с нейтралами.

Недиагональные компоненты тензора диффузии в сильном магнитном поле не зависят от частоты столкновений:

$$D_{\alpha\Lambda} = \frac{cT_\alpha}{eB}. \quad (5.5)$$

Соответствующий поток, который называют холловским или диамагнитным, направлен перпендикулярно градиенту концентрации (рис. 5.2). Его величину можно оценить как тепловую скорость заряженных частиц, умноженную на разницу в их концентрациях на масштабе ларморовского радиуса. Например, если градиент концентрации направлен вдоль оси  $x$ , то

$$\Gamma_{\alpha y} = \mp D_{\alpha\Lambda} \frac{dn}{dx} \sim V_{T\alpha} \rho_{c\alpha} \frac{dn}{dx}. \quad (5.6)$$

В однородном магнитном поле холловские потоки не приводят к изменению концентрации. Нетрудно показать, что

$$\nabla \cdot (\hat{D}_\alpha \nabla n) = \nabla \cdot (\hat{D}_\alpha^0 \nabla n), \quad (5.7)$$

где диагональный тензор  $\hat{D}_\alpha^0$  определен согласно

$$\hat{D}_\alpha^0 = \begin{pmatrix} D_{\alpha\perp} & 0 & 0 \\ 0 & D_{\alpha\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\alpha\parallel} \end{pmatrix}.$$

Диффузионные холловские потоки в однородном магнитном поле, таким образом, выпадают из системы уравнений (5.1). Разность холловских потоков приводит к появлению диамагнитного тока. Для замагниченных ионов и электронов

$$\vec{j}_\Lambda = e(\vec{\Gamma}_{i\Lambda} - \vec{\Gamma}_{e\Lambda}) = \frac{c(T_e + T_i)}{B^2} [\vec{B} \cdot \nabla n]. \quad (5.8)$$

Диамагнитный ток уменьшает вакуумное магнитное поле, причем возмущение магнитного поля оказывается порядка

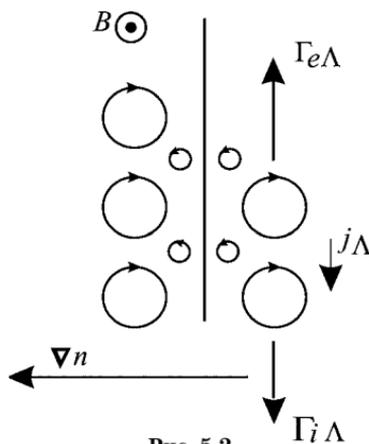


Рис. 5.2  
Холловские (диамагнитные) потоки электронов и ионов и диамагнитный ток

$$\frac{\delta B}{B} \sim \beta = \frac{8\pi n(T_e + T_i)}{B^2}. \quad (5.9)$$

В дальнейшем мы будем полагать  $\beta \ll 1$  и пренебрегать возмущением магнитного поля, вызванного токами по плазме.

Недиагональные компоненты тензоров подвижности в сильном магнитном поле одинаковы для электронов и ионов:

$$b_{\alpha\perp} = \frac{c}{B}. \quad (5.10)$$

Соответствующий холловский поток  $\vec{\Gamma}_{\alpha\perp} = nc[\vec{E} \cdot \vec{B}]/B^2$  представляет собой совместный дрейф электронов и ионов в скрещенных полях. Отметим, что потоки заряженных частиц совпадают только в случае замагниченных ионов, при  $x_i \ll 1$  ионный холловский поток значительно меньше соответствующего электронного потока.

Диагональные поперечные коэффициенты тензора подвижности, как и диффузионные, в сильном магнитном поле пропорциональны частоте столкновений:

$$b_{\alpha\perp} = \frac{e\nu_{\alpha N}}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2}. \quad (5.11)$$

Соответствующие потоки можно интерпретировать как дрейф, вызванный силой трения (рис. 5.3). Электрическое поле, направленное вдоль оси  $y$ , вызывает совместный дрейф ионов и электронов вдоль оси  $x$  со скоростями  $u_{ex} = u_{ey} = cE/B$ . Из-за столкновений с нейтралами возникает сила трения, действующая против скорости  $\vec{R}_{\alpha N} = -m_\alpha n\nu_{\alpha N}u_{\alpha N}$ . Она, в свою очередь, вызывает дрейф заряженных частиц в направлении электрического поля со

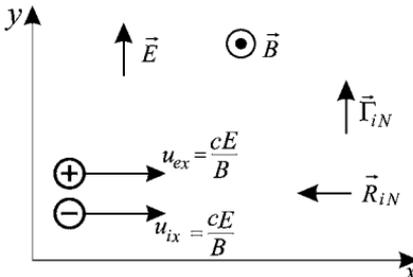


Рис. 5.3  
Поток в направлении электрического поля как дрейф под действием силы трения

скоростью  $u_{\alpha y} = -cR_{\alpha N}/(neB)$ . В результате в направлении электрического поля возникает поток  $\Gamma_{\alpha y} = nb_{\alpha\perp}E$  с подвижностью (5.11). Так как ион-нейтральная сила трения значительно больше электрон-нейтральной, то в замагниченной плазме поток ионов в направлении электрического поля оказывается значительно больше электронного.

В дальнейшем, за одним исключением, мы будем рассматривать только замагниченную плазму.

## 5.2. ОДНОМЕРНАЯ ДИФфуЗИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 5.2.1. ДИФфуЗИЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Одномерная диффузия поперек сильного магнитного поля похожа на диффузию без магнитного поля, меняются лишь роли частиц, так как в замагниченной плазме подвижность ионов значительно больше, чем подвижность электронов. Так же, как и без магнитного поля, умножая первое из уравнений (5.1) на  $b_{i\perp}$ , второе — на  $b_{e\perp}$  и складывая их, получаем уравнение амбиполярной диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_{a\perp} \Delta n = I - R, \quad (5.12)$$

где коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_{a\perp} = \frac{D_{e\perp} b_{i\perp} + D_{i\perp} b_{e\perp}}{b_{e\perp} + b_{i\perp}} \approx D_{e\perp} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right). \quad (5.13)$$

В отсутствие тока по плазме потенциал находится из условия равенства потоков и соответствует больцмановскому распределению для ионов:

$$\phi_d = -\frac{D_{i\perp} - D_{e\perp}}{b_{i\perp} + b_{e\perp}} \ln n + \text{const} \approx -\frac{T_i}{e} \ln n + \text{const}. \quad (5.14)$$

Мы видим, что, в отличие от случая отсутствия магнитного поля, положительное возмущение концентрации плазмы заряжено отрицательно, а самосогласованное электрическое поле удерживает ионы и ускоряет электроны, выравнивая потоки.

### 5.2.2. ОДНОМЕРНАЯ ДИФфуЗИЯ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К МАГНИТНОМУ ПОЛЮ

Пусть концентрация плазмы зависит только от координаты  $\zeta$ , а градиент концентрации образует угол  $\beta$  с магнитным полем (рис. 5.4). Удобно ввести новую систему координат  $(x, \eta, \zeta)$  вместо исходной  $(x, y, z)$ , где ось  $z$  параллельна магнитному полю. Новая система координат получается из старой вращением вокруг оси  $x$ , поэтому тензоры диффузии и подвижности в ней имеют вид

$$\hat{D}' = \hat{A}\hat{D}\hat{A}' ; \hat{b}' = \hat{A}\hat{b}\hat{A}' , \quad (5.15)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

— оператор поворота вокруг оси  $x$ . В новой системе координат тензор диффузии

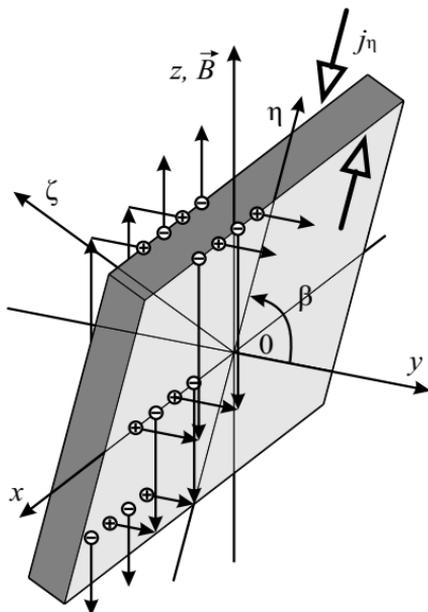


Рис. 5.4

Одномерная диффузия  $\hat{\nabla}n \parallel \hat{\zeta}$  для  $\mu_e \ll \mu \ll \mu_i$ ;  
стрелками показаны потоки частиц

$$\hat{D}' = \begin{pmatrix} D_{\perp} & D_{xy} \cos \beta & -D_{xy} \sin \beta \\ -D_{xy} \cos \beta & D_{\perp} \cos^2 \beta + D_{\parallel} \sin^2 \beta & (D_{\parallel} - D_{\perp}) \cos \beta \sin \beta \\ D_{xy} \sin \beta & (D_{\parallel} - D_{\perp}) \cos \beta \sin \beta & D_{\parallel} \cos^2 \beta + D_{\perp} \sin^2 \beta \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Здесь величины  $D_{\parallel}$ ,  $D_{\perp}$  и  $D_{xy}$  соответствуют компонентам тензора (5.3). Аналогичную форму имеет и тензор подвижности. Исходная система уравнений в новой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( D_{\alpha\zeta\zeta} \frac{\partial n}{\partial \zeta} \pm b_{\alpha\zeta\zeta} n \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = I - R, \quad (5.17)$$

где  $\alpha = i, e$ . Как и ранее, исключая электрическое поле, получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \zeta} [D(\mu^2) \frac{\partial n}{\partial \zeta}] = I - R, \quad (5.18)$$

где  $\mu = \cos \beta$ ,

$$\begin{aligned} D(\mu^2) &= \frac{D_{e\zeta\zeta} b_{i\zeta\zeta} + D_{i\zeta\zeta} b_{e\zeta\zeta}}{b_{i\zeta\zeta} + b_{e\zeta\zeta}} = \\ &= \{ [D_{e\parallel} \mu^2 + D_{e\perp} (1 - \mu^2)] [b_{i\parallel} \mu^2 + b_{i\perp} (1 - \mu^2)] + \\ &+ [D_{i\parallel} \mu^2 + D_{i\perp} (1 - \mu^2)] [b_{e\parallel} \mu^2 + b_{e\perp} (1 - \mu^2)] \} \times \\ &\times [(b_{e\parallel} + b_{i\parallel}) \mu^2 + (b_{e\perp} + b_{i\perp}) (1 - \mu^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Профиль потенциала находится из условия равенства потоков в направлении  $\zeta$ :

$$\phi = \frac{(D_{e\parallel} - D_{i\parallel}) \mu^2 + (D_{e\perp} - D_{i\perp}) (1 - \mu^2)}{(b_{e\parallel} + b_{i\parallel}) \mu^2 + (b_{e\perp} + b_{i\perp}) (1 - \mu^2)} \ln n + \text{const.} \quad (5.20)$$

Уравнение (5.18) имеет вид уравнения амбиполярной диффузии. Оно, однако, не может быть получено приравнованием полных потоков заряженных частиц,  $\Gamma_{e\parallel} \neq \Gamma_{i\parallel}$ ,  $\Gamma_{e\perp} \neq \Gamma_{i\perp}$ . Другими словами, даже в отсутствие внешнего тока в направлении  $\zeta$  в плазме существует ток вдоль оси  $\eta$ .

Обсудим физический механизм формирования потоков частиц. Если градиент концентрации почти перпендикулярен магнитному полю, так что выполнено условие  $\mu \ll \mu_0$ , где

$$\mu_0 = (b_{i\perp}/b_{e\parallel})^{1/2}, \quad (5.21)$$

то

$$D(\mu^2) = D_e(\mu^2) = (1 + T_i/T_e)[D_{e\parallel}\mu^2 + D_{e\perp}(1-\mu^2)]. \quad (5.22)$$

В этом случае коэффициент диффузии в  $1+T_i/T_e$  раз больше, чем униполярный коэффициент диффузии  $D_{e\zeta\zeta}$ . В частности, при  $\mu = 0$ , когда градиент концентрации строго перпендикулярен магнитному полю, коэффициент (5.22) совпадает с коэффициентом амбиполярной диффузии (5.13). При  $\mu \ll \mu_0$  потенциал (5.20) отрицателен, так как электроны менее подвижны. Электрическое поле ускоряет электроны, а распределение потенциала соответствует больцмановскому распределению для ионов. Как следует из (5.22), существует критический угол

$$\mu_e = (b_{e\perp}/b_{e\parallel})^{1/2}. \quad (5.23)$$

Для  $\mu < \mu_e$  электроны диффундируют в основном поперек магнитного поля и коэффициент диффузии (5.22) практически совпадает с коэффициентом амбиполярной диффузии поперек магнитного поля (5.13). С другой стороны, при углах  $\mu_e \ll \mu \ll \mu_0$  электроны движутся в основном параллельно  $\vec{B}$  и коэффициент диффузии  $D(\mu^2)$  превышает поперечный коэффициент амбиполярной диффузии. Ионы же в обоих случаях диффундируют преимущественно поперек магнитного поля, так как их униполярный коэффициент  $D_{i\zeta\zeta} \approx D_{i\perp}$ . В результате потоки электронов и ионов вдоль и поперек магнитного поля совершенно различны.

Для больших углов  $\mu > \mu_0$  между градиентом плотности и направлением, перпендикулярным магнитному полю, коэффициент диффузии (5.19) сводится к

$$D(\mu^2) = D_i(\mu^2) = (1 + T_e/T_i)[D_{i\parallel}\mu^2 + D_{i\perp}(1 - \mu^2)], \quad (5.24)$$

при этом диффузия контролируется ионами. Потенциал при  $T_e \sim T_i$  соответствует больцмановскому распределению для электронов. Теперь электроны движутся в основном вдоль  $\vec{B}$ , в то время как направление ионного потока зависит от соотношения между значениями  $\mu$  и параметра

$$\mu_i = (b_{i\perp}/b_{i\parallel})^{1/2}. \quad (5.25)$$

Для значений  $\mu < \mu_i$  ионный поток обусловлен в основном поперечным движением, в то время как в обратном случае ионы движутся в основном вдоль  $\vec{B}$ .

При специальном угле

$$\mu_c = (D_{i\perp}/D_{e\parallel})^{1/2} = \mu_0(T_i/T_e)^{1/2}$$

униполярные коэффициенты диффузии сравниваются:

$$D_{e\zeta\zeta} = D_{i\zeta\zeta} = D_{i\perp},$$

диффузионные потоки в направлении градиента концентрации также равны и, следовательно, электрическое поле отсутствует. При этом, несмотря на то что градиент концентрации почти перпендикулярен магнитному полю, коэффициент  $D(\mu^2)$  теперь равен  $D_{i\perp}$ , то есть оказывается бóльшим, чем поперечный амбиполярный коэффициент (5.13). Зависимость  $D(\mu^2)$  приведена на рис. 5.5.

Так как в двух предельных случаях  $\mu = 0$ ; 1 исходная система уравнений сводится к одному уравнению амбиполярной диффузии, то возникает вопрос, не может ли диффузия под углом к магнитному полю быть описана простым анизотропным уравнением амбиполярной диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla_{\parallel} \cdot (D_{a\parallel} \nabla_{\parallel} n) - \nabla_{\perp} \cdot (D_{a\perp} \nabla_{\perp} n) = I - R, \quad (5.26)$$

где коэффициенты определены согласно (4.3) и (5.13). Однако уравнение (5.26) можно получить, предположив одновременно  $\Gamma_{e\parallel} = \Gamma_{i\parallel}$  и  $\Gamma_{e\perp} = \Gamma_{i\perp}$ , что требует непотенциального электрического поля. Для одномерной задачи уравнению (5.26) соответствует

$$D_a(\mu^2) = D_{a\parallel}\mu^2 + D_{a\perp}(1 - \mu^2). \quad (5.27)$$

Это выражение сильно отличается от правильного выражения (5.19), особенно в области  $\mu \sim \mu_0$  (рис. 5.5).

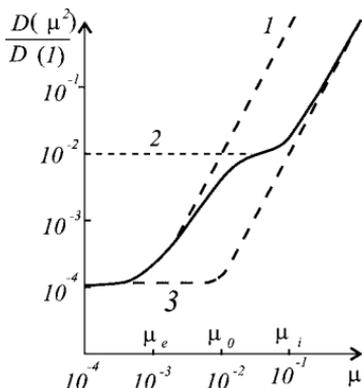


Рис. 5.5

Функция  $D(\mu^2)$  (сплошная линия) для  $T_e = T_i$ ,  $x_e = 10^3$ ,  $x_i = 10$ . Пунктир — различные аппроксимации:

1 — (5.22); 2 — (5.24); 3 — (5.27).

Ток вдоль поверхностей постоянной плотности вычисляется в соответствии с

$$j_{\eta} = en[-(D_{in\zeta} - D_{en\zeta})\frac{\partial n}{\partial \zeta} - n(b_{in\zeta} + b_{en\zeta})\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}]. \quad (5.28)$$

Подставляя выражение для потенциала (5.20), получаем

$$j_{\eta} = \frac{enD_{e\parallel}(1 + T_i/T_e)b_{i\perp} \sin\beta \cos\beta}{b_{e\parallel} \cos^2\beta + b_{i\perp} \sin^2\beta} \frac{\partial n}{\partial \zeta}. \quad (5.29)$$

Ток обращается в ноль при  $\beta = 0, \pi/2$ .

### 5.3. ДИФФУЗИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим диффузию малого возмущения  $\delta n$  на постоянном однородном фоне  $n_0$  в безграничной плазме. Положим для простоты  $T_e = T_i$ . Исходными уравнениями для описания диффузии плазмы с постоянными температурами электронов и ионов в магнитном поле являются уравнения (5.1) в отсутствие источников

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_e \nabla n - \hat{b}_e n \nabla \phi) &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_i \nabla n + \hat{b}_i n \nabla \phi) &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Граничные условия имеют вид

$$n(\vec{r} \rightarrow \infty) = n_0, \quad \phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0.$$

Выберем начальное возмущение в виде дельта-функции:

$$\delta n(\vec{r}, 0) = N\delta(\vec{r}).$$

Линеаризуем уравнение (5.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_e \nabla \delta n - \hat{b}_e n_0 \nabla \phi) &= 0, \\ \frac{\partial \delta n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_i \nabla \delta n + \hat{b}_i n_0 \nabla \phi) &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Будем искать решение в виде интегралов Фурье:

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta n_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k},$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{k}.$$

После подстановки в (5.31) получим уравнение для Фурье-гармоник:

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t} = -\vec{k} \hat{D}_e \vec{k} \delta n_{\vec{k}} + n_0 \vec{k} \hat{b}_e \vec{k} \phi_{\vec{k}},$$

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t} = -\vec{k} \hat{D}_i \vec{k} \delta n_{\vec{k}} - n_0 \vec{k} \hat{b}_i \vec{k} \phi_{\vec{k}}. \quad (5.32)$$

Его решение есть

$$\phi_{\vec{k}} = \frac{\vec{k} \hat{D}_e \vec{k} - \vec{k} \hat{D}_i \vec{k}}{\vec{k} \hat{b}_e \vec{k} + \vec{k} \hat{b}_i \vec{k}} \frac{\delta n_{\vec{k}}}{n_0},$$

$$\delta n_{\vec{k}}(t) = \delta n_{\vec{k}}(0) \exp[-D(\vec{k})t], \quad (5.33)$$

где

$$D(\vec{k}) = \frac{2\vec{k} \hat{D}_e \vec{k} \vec{k} \hat{D}_i \vec{k}}{\vec{k} \hat{D}_e \vec{k} + \vec{k} \hat{D}_i \vec{k}} = k^2 D(\mu^2). \quad (5.34)$$

Здесь  $\mu = \cos\beta$  — косинус угла между направлением вектора  $\vec{k}$  и магнитным полем:  $\mu = \vec{k}\vec{B}/(kB)$ . Коэффициент  $D(\mu^2)$  совпадает с (5.19):

$$D(\mu^2) = \frac{2[D_{e\parallel}\mu^2 + D_{e\perp}(1-\mu^2)][D_{i\parallel}\mu^2 + D_{i\perp}(1-\mu^2)]}{(D_{e\parallel} + D_{i\parallel})\mu^2 + (D_{i\perp} + D_{e\perp})(1-\mu^2)}. \quad (5.35)$$

Возмущение концентрации дается выражением

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{N}{(2\pi)^3} \int \exp[i\vec{k}\vec{r} - D(\mu^2)k^2t] d\vec{k}. \quad (5.36)$$

Разобьем интеграл по  $\vec{k}$  на три области интегрирования. В первой области вектор  $\vec{k}$  почти перпендикулярен магнитному полю:  $\mu \ll \mu_0$ . В этой области, как уже обсуждалось в предыдущем разделе, коэффициент диффузии (5.35) имеет простой вид (5.22):

$$D(\mu^2) = D_e(\mu^2) = 2[D_{e\parallel}\mu^2 + D_{e\perp}(1-\mu^2)] = 2[D_{e\parallel}k_z^2 + D_{e\perp}k_{\perp}^2].$$

В интеграле (5.36) перейдем к интегрированию в декартовых координатах и, пренебрегая малыми поправками, распространим интегрирование до бесконечности. Сделаем также замену переменных:

$$\tilde{z} = z(D_{e\parallel} / D_{e\perp})^{1/2}, \quad \tilde{k}_z = k_z(D_{e\parallel} / D_{e\perp})^{1/2}.$$

В новых переменных интеграл сводится к интегралу (4.19), который легко вычисляется. Таким образом, вклад области  $\mu \ll \mu_0$  составляет (в исходных переменных)

$$n^e = \frac{N \exp[-z^2 / 8D_{e\parallel}t - (x^2 + y^2) / 8D_{e\perp}t]}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}t^{3/2}D_{e\parallel}^{1/2}D_{e\perp}}. \quad (5.37)$$

Второй вклад в интеграл по  $\vec{k}$  дает область  $1 > \mu \gg \mu_0$ . В этой области коэффициент диффузии имеет вид

$$D(\mu^2) = D_i(\mu^2) = 2[D_{i\parallel}\mu^2 + D_{i\perp}(1 - \mu^2)] = 2[D_{i\parallel}k_z^2 + D_{i\perp}k_{\perp}^2].$$

В интеграле по  $\vec{k}$  область интегрирования (с точностью до малых поправок) можно распространить до нуля. Делая аналогичную замену переменных:

$$\tilde{z} = z(D_{i\parallel} / D_{i\perp})^{1/2}, \quad \tilde{k}_z = k_z(D_{i\parallel} / D_{i\perp})^{1/2}$$

и вычисляя интеграл, найдем, что вклад области  $1 > \mu \gg \mu_0$  составляет

$$n^i = \frac{N \exp[-z^2 / 8D_{i\parallel}t - (x^2 + y^2) / 8D_{i\perp}t]}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}t^{3/2}D_{i\parallel}^{1/2}D_{i\perp}}. \quad (5.38)$$

Наконец, анализ вклада от области  $\mu \sim \mu_0$  показывает, что этот вклад составляет величину порядка  $n_0 h$ , где

$$h = \frac{N}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}t^{3/2}D_{e\parallel}^{1/2}D_{i\perp}}. \quad (5.39)$$

Этот вклад представляет собой малую поправку в центре неоднородности.

Таким образом, возмущение концентрации представляет собой сумму

$$\delta n(\vec{r}, t) = n^e + n^i + O(n_0 h). \quad (5.40)$$

Аналогичным образом вычисляется и потенциал:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{N}{(2\pi)^3} \int \frac{D_{e\parallel}\mu^2 - D_{i\perp}(1-\mu^2)}{b_{e\parallel}\mu^2 + b_{i\perp}(1-\mu^2)} \frac{1}{n_0} \times \exp[i\vec{k}\vec{r} - D(\mu^2)k^2t] d\vec{k}. \quad (5.41)$$

При этом в области  $\mu \ll \mu_0$  предэкспоненциальный множитель равен  $-T/e$ , а в области  $1 > \mu \gg \mu_0$  этот множитель равен  $T/e$ . В результате интегрирования получаем

$$\phi(\vec{r}, t) = -\frac{T n^e}{e n_0} + \frac{T n^i}{e n_0} + O\left(\frac{T}{e} n_0 h\right). \quad (5.42)$$

Согласно (5.40) возмущение концентрации представляет собой сумму двух гауссовых профилей — «электронного»  $n^e$  и «ионного»  $n^i$ , а линии постоянной концентрации представляют собой суперпозицию двух эллипсоидов, рис. 5.6. Потенциал приведен на рис. 5.7.

Физическая причина необычного поведения решения состоит в следующем: электроны, имеющие наибольшую подвижность вдоль  $\vec{B}$ , стремятся диффундировать вдоль магнитного поля. При этом вдоль магнитного поля возникает отрицательный потенциал. Поперек же магнитного поля наиболее подвижными частицами являются ионы и,

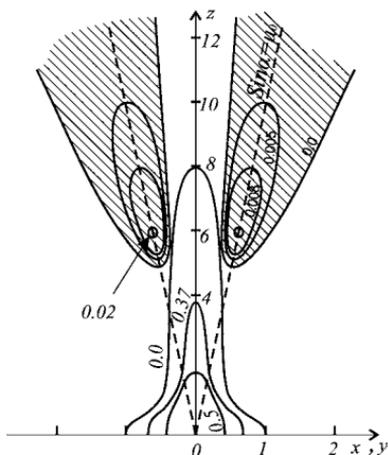


Рис. 5.6

Линии постоянной концентрации  $\delta n(\vec{r}, t)/\delta n(0, t)$ . Значения  $x_e = 30$ ,  $x_i = 0,3$ ;  $\vec{z}\parallel\vec{B}$ ; расстояния выражены в единицах  $(8D_{\parallel}t)^{1/2}$ . Области обеднения заштрихованы.

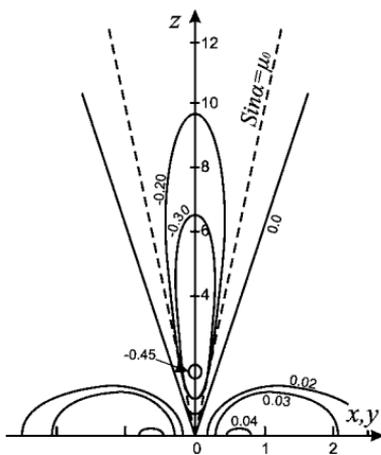


Рис. 5.7

Эквипотенциали. Потенциал в единицах  $T\delta n(0, t)/en_0$ , остальные обозначения аналогичны рис. 5.6.

соответственно, потенциал поперек  $\vec{B}$  положителен. В результате возникает потенциал квадрупольного типа, изображенный на рис. 5.7, с седловой точкой в начале координат. Так как  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ , то на оси  $z$  при  $z = \pm z_0$  возникают минимумы потенциала, а поперек магнитного поля при  $\rho = \rho_0$  ( $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) формируется максимум потенциала. Из-за условия  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$  электрическое поле не может всюду удерживать электроны вдоль магнитного поля, а ионы — поперек поля. В результате электроны и ионы диффундируют практически независимо друг от друга, формируя два независимых эллипсоида. Частицы другого знака не могут прийти в эти эллипсоиды из начала координат из-за малой подвижности. Поэтому электроны и ионы должны прийти, соответственно, в «ионный» и «электронный» эллипсоиды под действием самосогласованного поля из фоновой плазмы. В фоновой плазме, соответственно, должны формироваться области обеднения (заштрихованные области на рис. 5.6) с пониженной концентрацией фоновой плазмы. Размер этих областей составляет величину  $(8D_{e\parallel}t)^{1/2}$  вдоль  $\vec{B}$  и  $(8D_{i\perp}t)^{1/2}$  поперек  $\vec{B}$ . Ионы из этих областей уходят под действием электрического поля поперек  $\vec{B}$  в электронный «эллипсоид», а электроны вдоль  $\vec{B}$  — в «ионный» эллипсоид. При этом в плазме текут вихревые токи «короткого замыкания», которые и обеспечивают ускоренную, практически униполярную, диффузию неоднородности.

Угол  $\mu_0$  относительно магнитного поля, под которым формируются области обеднения, можно оценить, приравняв время движения ионов поперек  $\vec{B}$  под действием электрического поля,  $\rho^2/(b_{i\perp}\phi)$ , ко времени движения электронов вдоль  $\vec{B}$ ,  $z^2/(b_{e\parallel}\phi)$ . Получаем  $\mu_0 = \rho/z = (D_{i\perp}/D_{e\parallel})^{1/2}$ .

Потенциал имеет квадрупольный характер и на больших расстояниях должен спадать как  $r^{-3}$ . Так как движение частиц вдали от эллипсоидов происходит в основном под действием электрического поля, то дивергенции потоков оказываются порядка  $r^{-5}$ , а возмущение концентрации спадает с расстоянием как  $\delta n \sim t/r^5$ .

Вычислим возмущения концентрации и потенциала вдали от эллипсоидов. Для этого в условии равенства ди-

вергенций потоков  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}_e = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}_i$ , которое следует из (5.30), пренебрежем малыми членами порядка  $D_{e\perp}/D_{i\perp}$  и  $D_{i\parallel}/D_{e\parallel}$ . Введем новую переменную  $\zeta$  и функцию  $\Psi$  согласно

$$\zeta = z(b_{i\perp}/b_{e\parallel})^{1/2}, \quad \Psi = \phi - (T/e)\ln(n/n_0). \quad (5.43)$$

Тогда условие равенства дивергенций потоков сводится к виду

$$\nabla \cdot (n\nabla\Psi) = -\frac{2T}{e}\Delta_{\perp}n. \quad (5.44)$$

Уравнение (5.44) представляет собой уравнение Пуассона. Полный «заряд»:

$$Q = \int \frac{T}{2\pi en_0} \Delta_{\perp} n d\zeta dx dy = 0. \quad (5.45)$$

«Дипольный момент» также равен нулю из соображений симметрии. «Квадрупольный момент» дается выражением

$$M = \int (2\zeta^2 - x^2 - y^2) \frac{T}{2\pi en_0} \Delta_{\perp} n d\zeta dx dy = -\frac{2\mu_0 N}{\pi en_0}, \quad (5.46)$$

а квадрупольный потенциал

$$\Psi = M \frac{2\zeta^2 - x^2 - y^2}{2\pi(\zeta^2 + x^2 + y^2)^{5/2}}. \quad (5.47)$$

На больших расстояниях  $\phi = \Psi$ , поэтому в исходных переменных имеем вне эллипсоидов:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{NT}{2\pi en_0 r^3} \frac{\mu_0(2\mu_0^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{(\mu_0^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^{5/2}}, \quad (5.48)$$

где  $\alpha$  — угол с осью  $z$ .

Возмущение концентрации найдем, например, из ионного уравнения, в котором учтем только ионную поперечную подвижность в электрическом поле:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla_{\perp} \cdot (b_{i\perp} n \nabla_{\perp} \Psi) = b_{i\perp} n_0 \Delta_{\perp} \Psi. \quad (5.49)$$

Подставляя потенциал (5.48), найдем

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{NTD_{i\perp} t}{\pi\mu_0^4 r^5} \times \frac{12\cos^2 \alpha - 36\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha / \mu_0^2 + (9/2)\sin^4 \alpha / \mu_0^4}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha / \mu_0^2)^{9/2}}. \quad (5.50)$$

Выражение (5.50) описывает возмущение концентрации вне эллипсоидов. Видно, что при углах  $\alpha \sim \mu_0$  возмущение концентрации отрицательно, так что в фоновой плазме действительно возникают области обеднения.

При увеличении возмущения концентрации области обеднения углубляются, и при большом возмущении концентрации механизм короткого замыкания по фоновой плазме становится неэффективен. В пределе очень больших возмущений, когда глубина областей обеднения становится порядка  $n_0$ , основная часть электронов и ионов исходного возмущения диффундирует совместно и эволюция этой части описывается уравнением анизотропной амбиполярной диффузии (5.26). Лишь небольшая часть частиц расплывается униполярно и уходит в «электронный» и «ионный» эллипсоиды. Более подробно о нелинейной эволюции возмущений см. в [7].

#### 5.4. ДИФФУЗИЯ В ПЛАЗМЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕНКАМИ

Проанализируем распад плазмы в баллоне с диэлектрическими стенками длиной  $L$  и радиусом  $a$  с осью  $z$ , параллельной магнитному полю. Пусть начальное распределение концентрации плазмы обладает азимутальной симметрией, а в остальном произвольно. Граничными условиями на диэлектрических стенках камеры являются условия

$$n(z=0, L) = 0, \quad n(r=a) = 0; \\ \Gamma_{e\parallel}(z=0, L) = \Gamma_{i\parallel}(z=0, L), \quad \Gamma_{e\perp}(r=a) = \Gamma_{i\perp}(r=a). \quad (5.51)$$

Можно выделить четыре характерных времени диффузии вдоль и поперек магнитного поля для электронов и ионов:

$$\tau_{\alpha\parallel} = \frac{L^2}{\pi^2 D_{\alpha\parallel}}, \quad \tau_{\alpha\perp} = \frac{a^2}{(2.4)^2 D_{\alpha\perp}}. \quad (5.52)$$

В замагниченной плазме  $\tau_{e\perp} \gg \tau_{i\perp}$  и  $\tau_{e\parallel} \ll \tau_{i\parallel}$ .

Будем называть быстрыми процессы, происходящие за времена  $\tau_f = \max(\tau_{e\parallel}, \tau_{i\perp})$ . Такие быстрые процессы описываются уравнениями, в которых можно пренебречь диф-

фузией ионов вдоль магнитного поля и электронов поперек поля:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D_{e\parallel} \frac{\partial n}{\partial z} - n b_{e\parallel} \frac{\partial \phi}{\partial z}), \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (D_{i\perp} \frac{\partial n}{\partial r} + b_{i\perp} n \frac{\partial \phi}{\partial r}).\end{aligned}\quad (5.53)$$

За малые времена порядка  $\tau_f$  медленные в данном направлении частицы, ионы вдоль магнитного поля и электроны — поперек магнитного поля, не успевают выйти на стенку. Поэтому, в силу отсутствия тока на стенку, и потоки других частиц на стенку на этой стадии  $\tau \sim \tau_f$  отсутствуют:

$$\begin{aligned}\Gamma_{e\parallel}(z=0, L) &= \Gamma_{i\parallel}(z=0, L) = 0, \\ \Gamma_{e\perp}(r=a) &= \Gamma_{i\perp}(r=a) = 0.\end{aligned}\quad (5.54)$$

Найдем решение (5.54) при условии (при обратном неравенстве решение строится аналогичным образом)

$$\tau_{e\parallel} \ll \tau_{i\perp}.\quad (5.55)$$

В этом случае каждый из членов в правой части электронного уравнения (5.53) больше, чем члены в правой части ионного уравнения. Так как правые части этих уравнений равны, то члены в правой части электронного уравнения почти нацело компенсируют друг друга. Соответствующий потенциал является больцмановским для электронов:

$$\phi = \frac{T_e}{e} \ln n + \Psi(r),\quad (5.56)$$

где  $\Psi(r)$  — произвольная функция радиуса. Проинтегрируем (5.53) по  $z$  по длине баллона. Так как поток электронов на торцевые стенки равен нулю, (5.54), то получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r [(1 + T_e/T_i) D_{i\perp} \frac{\partial N_1}{\partial r} + b_{i\perp} N_1 \frac{\partial \Psi}{\partial r}],\end{aligned}\quad (5.57)$$

где  $N_1 = \int_0^L n dz$ . Так как за времена  $\tau \sim \tau_f$  частицы не уходят на торцевые стенки, то согласно (5.57) величина  $N_1 = \text{const}(t)$  сохраняется и может быть вычислена по начальному профилю концентрации:

$$N_1(r) = \int_0^L n(r, z, t=0) dz.$$

Из условия равенства нулю правой части ионного уравнения в (5.57) и отсутствия потока ионов на боковую стенку найдем

$$\Psi = -\frac{T_e + T_i}{e} \ln N_1 + \text{const.} \quad (5.58)$$

Подставляя найденный потенциал (5.56), (5.58) в уравнение для ионов (5.53), имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[ (1 + T_e/T_i) D_{i\perp} \frac{\partial n}{\partial r} - b_{i\perp} \frac{(T_e + T_i)}{e} n \frac{\partial \ln N_1}{\partial r} \right]. \quad (5.59)$$

Уравнение (5.59) описывает эволюцию профиля концентрации на временах  $\tau \sim \tau_{i\perp}$ . При этом происходит перестройка профиля внутри баллона без выхода частиц на стенки. В конце этой быстрой стадии устанавливается профиль концентрации, соответствующий  $\Gamma_{i\perp} = 0$ . Согласно (5.59) в конце быстрой стадии имеем

$$n = N_1(r) f(z).$$

Произвольную функцию  $f(z)$  найдем, проинтегрировав это выражение по радиусу и введя

$$N_2(z) = \int_0^a 2\pi n r dr = \int_0^a 2\pi n(r, z, t=0) r dr,$$

$$N = \int_0^L \int_0^a 2\pi n r dz dr = \int_0^L \int_0^a 2\pi n(r, z, t=0) r dz dr.$$

В результате в конце быстрой стадии устанавливается распределение

$$n = \frac{N_1(r) N_2(z)}{N}. \quad (5.60)$$

Соответствующее распределение потенциала найдем из (5.56), (5.58):

$$\phi = \frac{T_e}{e} \ln N_2 - \frac{T_i}{e} \ln N_1 + \text{const.} \quad (5.61)$$

Таким образом, на временах  $\tau \sim \tau_f$  устанавливаются профили (5.60), (5.61) за счет перераспределения ионов и элек-

тронов внутри объема при сохранении интегралов  $N_1$ ,  $N_2$  и полного числа частиц  $N$ . Пример такой перестройки приведен на рис. 5.8. При этом по плазме протекают вихревые токи короткого замыкания, аналогичные рассмотренным в предыдущем разделе.

Анализ случая  $\tau_{e\parallel} \gg \tau_{i\perp}$  проводится аналогично и также приводит к профилям (5.60), (5.61).

На временах, больших чем  $\tau_f$ , необходимо учитывать выход частиц на стенки и решать полную систему уравнений (5.50). При этом в качестве начального условия следует выбрать распределение концентрации (5.60), которое является произведением функций от  $r$  и  $z$ . Поэтому и решение для концентрации можно искать в виде произведения двух функций от  $r$  и  $z$ :  $n = n_1(r)n_2(z)$ , а потенциал — в виде  $\phi = \phi_1(r) + \phi_2(z)$ , который при  $t = 0$  совпадает с (5.61). Решение методом разделения переменных дает

$$n = \sum_{j,k=1} A_j B_k J_0(\zeta_k r/a) \sin(\pi j z/L) \exp(-t/\tau_{jk}), \quad (5.62)$$

где

$$\frac{1}{\tau_{jk}} = (1 + T_e/T_i) D_{\parallel} (\pi j/L)^2 + (1 + T_i/T_e) D_{e\perp} (\zeta_k/a)^2.$$

Профиль концентрации (5.62) совпадает с решением уравнения анизотропной амбиполярной диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla_{\parallel} \cdot (D_{a\parallel} \nabla_{\parallel} n) + \nabla_{\perp} \cdot (D_{a\perp} \nabla_{\perp} n).$$

На временах  $\tau > \tau_f$  происходит совместный уход частиц из объема на стенку, а время распада плазмы определяется наименьшим из наибольших времен  $\tau_s = \min(\tau_{i\parallel}, \tau_{i\perp})$ .

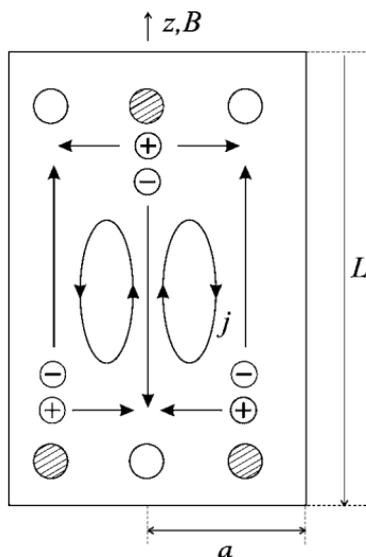


Рис. 5.8

Схема замыкания потоков электронов и ионов при диффузии в диэлектрическом баллоне на временах  $\tau \sim \tau_f$

Таким образом, распад плазмы в диэлектрическом баллоне происходит в две стадии. На первой, быстрой, стадии за времена порядка  $\tau_f$  устанавливается профиль (5.60) из-за диффузии электронов вдоль магнитного поля, а ионов — поперек поля без выхода частиц на стенку. По плазме при этом протекают вихревые токи короткого замыкания. На второй, медленной, стадии за времена  $\tau_s$  происходит совместная амбиполярная диффузия частиц на стенки, а профиль концентрации описывается (5.61).

В баллоне с металлическими стенками возможно замыкание токов по стенкам. При этом уход частиц из объема происходит за время  $\tau_f = \max(\tau_{e\parallel}, \tau_{i\perp})$ , т. е. гораздо быстрее, чем в баллоне с диэлектрическими стенками. Это явление известно как «эффект Саймона». Изменяя напряжение между торцевыми и боковыми пластинами, можно изменять время распада плазмы от  $\tau_f$  до  $\tau_s$ . Соответствующие выражения для профилей концентрации и потенциала приведены в [7].

### 5.5. ДИФфуЗИОННЫЙ ЗОНД В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В магнитном поле работа диффузионного зонда, рассмотренного в разделе 4.2, существенно изменяется. Прежде всего, в сильном магнитном поле движение заряженных частиц вблизи маленького электрода может быть описано с помощью транспортных (гидродинамических) уравнений, даже если длина свободного пробега превышает его размеры. Ниже будет показано, что критерием применимости гидродинамического описания для электронов (при вычислении, например, электронного тока насыщения) является условие

$$\rho_{ce} \ll a, \quad (5.63)$$

где  $a$  — поперечный по отношению к магнитному полю размер зонда, а  $\rho_{ce}$  — ларморовский радиус электронов. Причина состоит в том, что для положительно заряженного зонда концентрация плазмы возмущается на очень большом расстоянии  $l_{\parallel} = a\omega_{ce}/v_{eN} = ax_e$  вдоль магнитного

поля и условие применимости на длину свободного пробега  $\lambda_{eN} \ll l_{\parallel}$  автоматически совпадает с условием (5.63).

Профили концентрации и потенциала описываются системой уравнений:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_e \vec{\nabla} n - \hat{b}_e n \vec{\nabla} \phi) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_i \vec{\nabla} n + \hat{b}_i n \vec{\nabla} \phi) &= 0,\end{aligned}\quad (5.64)$$

с граничными условиями  $n(\vec{r} \rightarrow \infty) = n_0$ ;  $\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0$ . Для случая электронного тока насыщения потенциал является бoльцмановским для ионов  $e\phi = -T_i \ln n/n_0$ , что соответствует отсутствию ионного тока на зонд. При этом электронное уравнение в (5.64) принимает вид

$$\frac{D_{e\perp}}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial n}{\partial r} + D_{e\parallel} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = 0. \quad (5.65)$$

Простым преобразованием координат  $z' = z(D_{e\perp}/D_{e\parallel})^{1/2}$  это уравнение сводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta n = 0. \quad (5.66)$$

Зонд в виде эллипсоида вращения с полуосями  $a$ ,  $a$ ,  $b$  в новых координатах превращается в диск с полуосями  $a$ ,  $a$ ,  $b/x_e$ . Таким образом, задача сводится к рассмотренной в главе 4 задаче для зонда без магнитного поля. Решение ищется в эллиптических координатах, которые в исходных переменных имеют вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + \xi)} + \frac{z^2}{b^2(1 + \xi x_e^2)} = 1. \quad (5.67)$$

Концентрация описывается выражением

$$n(\vec{r}) \equiv n_0(1 - n^e) = n_0 \left[ 1 - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \gamma_e^2}{\gamma_e^2 + \xi}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \gamma_e^2}{\gamma_e^2}}} \right], \quad (5.68)$$

где  $\gamma_e = b/ax_e$ . Из (5.67) действительно следует, что масштаб возмущения вдоль магнитного поля есть  $l_{\parallel} = a\omega_{ce}/v_{eN} = ax_e$ . При условии  $b \ll ax_e$  размер обедненной области вдоль

магнитного поля намного больше продольного размера зонда.

Электронный ток насыщения в преобразованных координатах совпадает с выражением (4.39), причем емкость диска с маленькой продольной полуосью  $b/x_e$  есть  $C = 2/\pi$ . При переходе в исходные переменные следует учесть, что ток насыщения также преобразуется. В результате имеем

$$I_e^{sat} = 8en_0ax_e(1 + T_i/T_e)D_{e\perp}. \quad (5.69)$$

Большой продольный размер возмущенной области, откуда собирается электронный ток, накладывает сильные ограничения на поперечный размер зонда. Диагностика является не возмущающей, если  $l_{\parallel} \ll L$ , где  $L$  — характерный размер плазмы вдоль магнитного поля. Это требование в замагниченной плазме часто оказывается нелегко выполнить.

## Глава 6. ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА С ТОКОМ

### 6.1. ПЛАЗМА С ТОКОМ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

**К**ак показано в разделе 4.1, в простой плазме, состоящей из электронов и ионов одного сорта, в отсутствие магнитного поля протекание тока не приводит к изменению характера эволюции возмущения. Система уравнений (4.1) сводится к уравнению амбиполярной диффузии (4.2) и при протекании тока в плазме лишь появляется дополнительное электрическое поле (4.14), пропорциональное току.

Ситуация принципиально меняется, если в плазме присутствуют два или больше сортов ионов. Рассмотрим одномерную эволюцию многокомпонентной плазмы, содержащую  $p$  заряженных частиц, которая описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial x} - Z_\alpha n_\alpha b_\alpha E \right) &= 0; \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + b_e n_e E \right) &= 0; \\ n_e &= \sum_{\alpha=1}^{p-1} Z_\alpha n_\alpha, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где индекс  $\alpha$  соответствует сорту ионов. Граничные условия для системы (6.1) имеют вид

$$\begin{aligned} n_\alpha(x \rightarrow \pm\infty) &= n_\alpha^0; \\ n_e(x \rightarrow \pm\infty) &= n_0; \\ E(x \rightarrow \pm\infty) &= E_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Последнее условие означает, что на бесконечности существует электрическое поле  $E_0$ , которое обеспечивает протекание тока  $j$ .

Вычитая из электронного уравнения в (6.1) сумму ионных уравнений, получим условие равенства дивергенций потоков частиц или  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ . В одномерном случае это условие соответствует сохранению тока:

$$j = eE_0[b_e n_0 + \sum_{\alpha=1}^{p-1} Z_\alpha^2 b_\alpha n_\alpha^{(0)}] = eE[b_e n_e + \sum_{\alpha=1}^{p-1} Z_\alpha^2 b_\alpha n_\alpha] + e[D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} D_\alpha Z_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial x}]. \quad (6.3)$$

Выражая электрическое поле из (6.3) и подставляя в ионные уравнения (6.1), получим систему уравнений для концентраций ионов:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} E_0 \sum_{\beta=1}^{p-1} n_\beta^0 (b_e + Z_\beta^2 b_\beta) \frac{Z_\alpha b_\alpha n_\alpha}{\sum_{\beta=1}^{p-1} (b_e + Z_\beta^2 b_\beta) n_\beta} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -D_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial x} - Z_\alpha b_\alpha n_\alpha \frac{\sum_{\beta=1}^{p-1} (D_e - D_\beta) Z_\beta \frac{\partial n_\beta}{\partial x}}{\sum_{\beta=1}^{p-1} (b_e + Z_\beta^2 b_\beta) n_\beta} \right] = 0. \quad (6.4)$$

В простой плазме с однозарядными ионами одного сорта  $p = 2$  второй член в левой части обращается в ноль, так как сумма в знаменателе просто равна  $(b_e + b_i)n_1$  и сокращается с числителем, и уравнение (6.4) переходит в уравнение амбиполярной диффузии (4.2). В плазме же с большим числом ионов этот член сохраняется, и фоновое электрическое поле  $E_0$  в значительной степени определяет эволюцию неоднородности. Поэтому ситуация простой плазмы является вырожденной.

Проанализируем решение системы (6.3) в так называемом дрейфовом приближении, когда электрическое поле, связанное с протеканием тока, является достаточно сильным, так что выполнено неравенство

$$E_0 \gg T/(eL), \quad (6.5)$$

где  $L$  — характерный пространственный масштаб. В этом случае процессами диффузии (третий член в левой части (6.4)) можно пренебречь. Ограничимся случаем двух сортов ионов 1 и 2 с  $Z_{1,2} = 1$ . В дрейфовом приближении система уравнений (6.4) с учетом  $b_{1,2} \ll b_e$  имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + b_1 E_0 n_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{n_1}{n_1 + n_2} &= 0, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + b_2 E_0 n_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{n_2}{n_1 + n_2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

### 6.1.1. МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Найдем решение системы (6.6) в дрейфовом приближении в случае малых возмущений концентрации ионов:

$$n_\alpha = \delta n_\alpha + n_\alpha^0, \quad \delta n_\alpha \ll n_\alpha^0.$$

Ищем решение линеаризованных уравнений (6.6) в виде интеграла Фурье:

$$\delta n_{1,2}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta n_{1,2k} \exp(ikx - i\omega t) dk.$$

Подстановка в линеаризованную систему уравнений (6.6) приводит к алгебраической системе уравнений относительно  $\delta n_{1k}$  и  $\delta n_{2k}$ . Приравнявая определитель к нулю, найдем два корня:

$$\omega_1 = 0, \quad \frac{\omega_2}{k} = E_0 \frac{b_1 n_2^0 + b_2 n_1^0}{n_1^0 + n_2^0} = V \quad (6.7)$$

и Фурье-образы возмущений концентрации:

$$\begin{aligned} \delta n_{1k}(t) &= \frac{b_2 n_1^0}{b_1 n_2^0 + b_2 n_1^0} \{ [\delta n_{2k}(0) + \delta n_{1k}(0) b_2 / b_1] + \\ &+ [-\delta n_{2k}(0) + \delta n_{1k}(0) n_2^0 / n_1^0] \exp(-ikVt) \}; \\ \delta n_{2k}(t) &= \frac{b_1 n_2^0}{b_1 n_2^0 + b_2 n_1^0} \{ [\delta n_{1k}(0) + \delta n_{2k}(0) b_1 / b_2] + \\ &+ [-\delta n_{1k}(0) + \delta n_{2k}(0) n_1^0 / n_2^0] \exp(-ikVt) \}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Возмущения концентрации представляют собой неподвижную и движущуюся части. Первая из них соответствует нулевой частоте  $\omega_1$ , а вторая соответствует возмущениям концентрации обоих сортов, перемещающихся со скоростью  $V$ .

Явление распространения возмущений концентрации называется «амбиполярной подвижностью», а скорость  $V$  известна как «скорость амбиполярной подвижности».

Пусть в начальный момент времени в плазме имеются только ионы сорта 2, так что  $n_1^0 = 0$ , а начальное возмущение состоит только из ионов сорта 1:  $\delta n_2(x, t = 0) = 0$ . Тогда, устремляя в (6.8)  $n_1^0 \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned}\delta n_{1k}(t) &= \delta n_{1k}(0) \exp(-ikb_1 E_0 t), \\ \delta n_{2k}(t) &= \delta n_{1k}(0) \frac{b_2}{b_1} [1 - \exp(-ikb_1 E_0 t)].\end{aligned}\quad (6.9)$$

В исходных переменных

$$\begin{aligned}\delta n_1(x, t) &= \delta n_1(x - b_1 E_0 t), \\ \delta n_2(x, t) &= \frac{b_2}{b_1} (\delta n_1(x, t = 0) - \delta n_1(x, t)).\end{aligned}\quad (6.10)$$

Соответствующие профили концентрации представлены на рис. 6.1.

Сплошная линия — инжектированные ионы, штрихпунктирная линия — фоновые ионы, пунктир — концентрация электронов. Соотношение подвижностей:  $b_1 = 2b_2 \ll b_e$ .

В начальный момент времени инжектированные ионы находятся вблизи начала координат, а возмущение концентрации фоновых ионов отсутствует. Возмущение инжектированных ионов перемещается с постоянной скоростью  $b_1 E_0$ , то есть движется в невозмущенном электрическом поле. Малое же возмущение электрического поля в

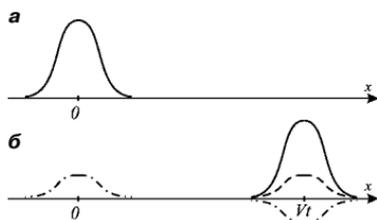


Рис. 6.1

Малые возмущения концентраций в плазме с током. Инжектированы ионы сорта 1 с Гауссовым профилем и полушириной  $a$  в плазму с фоновыми ионами сорта 2:

$a$  — начальный момент времени;  $b$  — момент времени  $t = 5a/(b_1 E_0)$ .

линейном приближении приводит к перераспределению только фоновых ионов. На месте исходного возмущения формируется пик фоновых ионов, амплитуда которого больше или меньше исходного, в зависимости от отношения подвижностей  $b_1/b_2$ . Второе отрицательное возмущение концентрации фоновых ионов той же амплитуды сопровождает пик инжектированных ионов. Отметим, что в частном случае  $b_1 = b_2$  движущееся возмущение концентрации электронов отсутствует, так как положительное и отрицательное возмущения инжектированных и фоновых ионов полностью компенсируют друг друга. Исходное же возмущение электронной концентрации просто покоится, что соответствует решению для простой плазмы, которое описывается уравнением амбиполярной диффузии. В дрейфовом приближении это означает отсутствие какой-либо эволюции. Таким образом, даже в случае совпадения подвижностей инжектированных и фоновых ионов имеется движущийся сигнал, который можно обнаружить, если природа фоновых и инжектированных ионов различна.

В общем случае многих сортов ионов произвольное возмущение распадается на  $(p - 1)$  сигналов, один из которых неподвижен.

### 6.1.2. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Проанализируем нелинейную эволюцию на простом примере, когда подвижность фоновых ионов сорта 2 пренебрежимо мала:  $b_2 = 0$ . Тогда, полагая в (6.6)  $n_2 = n_2^0 = \text{const}$  и  $n_1^0 = 0$ , получаем уравнение для инжектированных ионов:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + V(n_1) \frac{\partial n_1}{\partial x} = 0, \quad (6.11)$$

где  $V(n_1)$  — нелинейная скорость амбиполярного дрейфа:

$$V(n_1) = \frac{b_1 E_0 (n_2^0)^2}{(n_1 + n_2^0)^2}. \quad (6.12)$$

Уравнение (6.11) описывает распространение простой нелинейной волны и имеет решение:

$$n_1 = n_1(x - V(n_1)t). \quad (6.13)$$

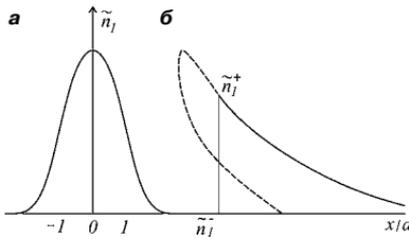


Рис. 6.2

Эволюция нелинейного начального Гауссова профиля инжектированных ионов в плазме с неподвижными фоновыми ионами:

*a* — начальный профиль; *b* —  $\tilde{t} = 15$  после формирования скачка концентрации.

Другими словами, каждая точка начального профиля инжектированных ионов со значением  $n_1$  движется со своей скоростью  $V(n_1)$ . Как следует из (6.12), точки профиля с большей концентрацией движутся с меньшей скоростью, поэтому передний фронт профиля растягивается, а задний становится круче (рис. 6.2). С течением времени формируется многозначный профиль концентрации, что является следствием используемого дрейфового приближения. Это явление той же природы, что и опрокидывание волн в обычной гидродинамике.

Безразмерная плотность  $\tilde{n}_1 = n_1 / n_2^0$ ; время  $\tilde{t} = tb_1 E_0 / a$ ; амплитуда начального возмущения  $\tilde{n}_1^{\max}(t=0) = 2$ .

Для получения физически осмысленного решения необходимо учесть диффузионные члены в исходной системе уравнений. Действительно, в процессе эволюции профиль становится круче и формируется резкий перепад концентрации — диффузионный скачок, где неравенство (6.5) неприменимо. Характерный масштаб диффузионного скачка

$$l_T = \frac{T}{eE} \quad (6.14)$$

соответствует балансу диффузионного и полевого членов в (6.4). Его положение, как и в гидродинамике, находится из «правила площадей». На многозначном профиле проводится вертикальная линия так, чтобы площади под многозначным решением и под профилем с разрывом совпадали (рис. 6.2). При этом обеспечивается сохранение полного числа частиц, а пологая часть получившегося разрывного профиля концентрации является решением, так как для нее выполнено неравенство (6.5). Скорость перемещения скачка также находится из условия сохранения числа частиц:

$$W = \frac{\Gamma_1(n_1^+) - \Gamma_1(n_1^-)}{n_1^+ - n_1^-}, \quad (6.15)$$

где  $\Gamma_1 = n_1 b_1 E$  — поток частиц, а величины  $n_1^+$ ,  $n_1^-$  соответствуют значениям концентрации справа и слева от скачка соответственно. Структуру скачка можно получить, как и в гидродинамике, перейдя в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $W$ , и сведя исходные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

## 6.2. ПЛАЗМА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 6.2.1. ОДНОМЕРНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

В магнитном поле явление амбиполярной подвижности возникает даже в простой плазме с ионами одного сорта. Рассмотрим эволюцию плазмы в той же геометрии, что и в разделе 5.2, когда концентрация плазмы зависит только от координаты  $\zeta$ , образующей угол  $\beta$  с магнитным полем. Пусть при этом имеется произвольное фоновое электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Исходные уравнения в системе координат  $(x, \eta, \zeta)$ , аналогично разделу 5.2, имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( D_{\alpha\zeta\zeta} \frac{\partial n}{\partial \zeta} \pm b_{\alpha\zeta\zeta} n \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \pm b_{\alpha\zeta x} n \frac{\partial \phi}{\partial x} \pm b_{\alpha\zeta\eta} n \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = I - R, \quad (6.16)$$

где  $\alpha = i, e$ , а компоненты тензоров диффузии и подвижности соответствуют (5.16). Граничное условие для потенциала имеет более общий вид:

$$\nabla\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = -\vec{E}_0. \quad (6.17)$$

Отметим, что компоненты электрического поля  $E_\eta$  и  $E_x$  не зависят от координаты  $\zeta$  и совпадают с фоновыми значениями:  $E_\eta = E_{0\eta}$  и  $E_x = E_{0x}$ . Это следует из условия потенциальности электрического поля:  $\partial E_\eta / \partial \zeta = \partial E_\zeta / \partial \eta = 0$  и  $\partial E_x / \partial \zeta = \partial E_\zeta / \partial x = 0$ . Электрическое поле в направлении  $\zeta$  исключается так же, как и в разделе 5.2. Умножая уравнения соответственно на  $b_{e\zeta\zeta}$  и  $b_{i\zeta\zeta}$  и складывая, получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \zeta} [D(\mu^2) \frac{\partial n}{\partial \zeta}] + V_\zeta(\mu^2) \frac{\partial n}{\partial \zeta} = I - R, \quad (6.18)$$

где  $V_\zeta(\mu^2)$  есть  $\zeta$  компонент вектора:

$$\begin{aligned} \vec{V}(\mu^2) = \\ = \frac{[b_{e\parallel}\mu^2 + b_{e\perp}(1-\mu^2)]\hat{b}_i\vec{E}_0 - [b_{i\parallel}\mu^2 + b_{i\perp}(1-\mu^2)]\hat{b}_e\vec{E}_0}{(b_{e\parallel} + b_{i\parallel})\mu^2 + (b_{e\perp} + b_{i\perp})(1-\mu^2)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Таким образом, возмущение концентрации кроме диффузии испытывает амбиполярный дрейф. Как следует из (6.19), если фоновое электрическое поле лежит в плоскости  $(\eta, \zeta)$ , то скорость амбиполярного дрейфа обращается в ноль, если ось  $\zeta$  параллельна или перпендикулярна магнитному полю, но отлична от нуля при произвольном угле между осью  $\zeta$  и магнитным полем. Амбиполярная же подвижность, вызванная полем  $E_x$ , для замагниченных ионов просто соответствует дрейфу в скрещенных полях.

Электрическое поле в направлении  $\zeta$  находится вычитанием ионного и электронного уравнений и последующим интегрированием по  $\zeta$ . Величина  $E_\zeta$  содержит диффузионную часть и часть линейную по фоновому полю  $\vec{E}_0$ .

### 6.2.2. ЭВОЛЮЦИЯ МАЛОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАЗМЕ

Неодномерная эволюция малого возмущения  $\delta n$  на постоянном однородном фоне  $n_0$  в безграничной плазме при наличии фонового электрического поля  $\vec{E}_0$  качественно отличается от диффузии, рассмотренной в разделе 5.3. Исходные уравнения для концентрации и возмущенного потенциала теперь имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_e \nabla n - \hat{b}_e n \nabla \phi + \hat{b}_e n \vec{E}_0) = 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_i \nabla n + \hat{b}_i n \nabla \phi - \hat{b}_i n \vec{E}_0) = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

с теми же граничными условиями:

$$n(\vec{r} \rightarrow \infty) = n_0, \quad \phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0.$$

Решение линеаризованной системы (6.20) с начальным условием в виде дельта-функции  $\delta n(\vec{r}, 0) = N\delta(\vec{r})$  методом Фурье приводит к выражению

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{N}{(2\pi)^3} \int \exp[i\vec{k}(\vec{r} - \vec{V}(\mu^2)t) - D(\mu^2)k^2 t] d\vec{k}, \quad (6.21)$$

где величина  $\vec{V}(\mu^2)$  определена согласно (6.19). Анализ этого интеграла показывает, что исходное возмущение концентрации с течением времени разделяется на движущиеся сгустки [7]. Пример такой эволюции для случая, когда электрическое поле перпендикулярно магнитному полю, приведен на рис. 6.3. Исходное возмущение разделяется на два сгустка, скорости которых близки к скоростям ионов и электронов в фоновом электрическом поле (рис. 6.3a). Возникающая в плазме поляризация приводит к растяжению электронного сгустка вдоль магнитного поля. Поддержание квазинейтральности, как и при диффузии, осуществляется за счет токов короткого замыкания по плазме и возникновения в фоновой плазме областей обеднения, которые движутся вместе со сгустками. Большое исходное возмущение, когда фоновой плазмы

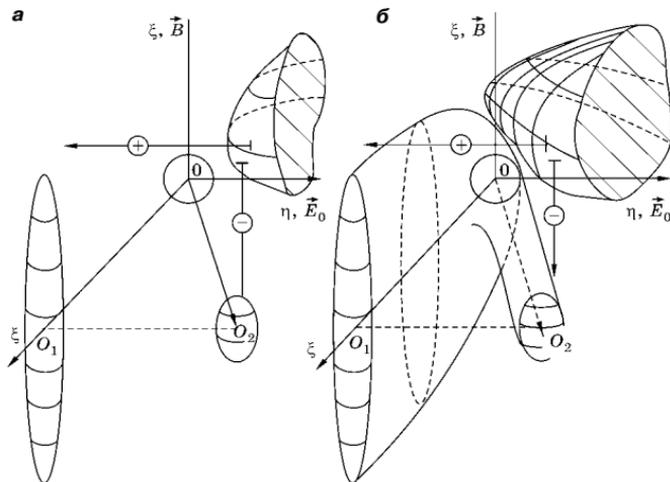


Рис. 6.3

Эволюция возмущения концентрации в случае  $\vec{E}_0 \perp \vec{B}$  для малого (a) и сильного (б) возмущения:  $OO_1$  и  $OO_2$  — направления движения сгустков; заштрихованы области обеднения

недостаточно для поддержания квазинейтральности, в основном покоится, но его периферийные части испытывают дрейф (рис. 6.3б). В результате происходит нелинейное растяжение исходного сгустка.

### 6.2.3. ЭФФЕКТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ

В этом разделе мы рассмотрим проводимость в слабом магнитном поле  $x_e x_i \ll 1$ , при котором плазма является немагнитной. В то же время магнитное поле остается достаточно сильным, чтобы были замагниченными электроны  $x_e \gg 1$ . В такой плазме поперечная подвижность электронов значительно меньше продольной электронной подвижности  $b_{e\perp} \ll b_{e\parallel}$ , но, в отличие от предыдущих случаев, поперечная подвижность ионов мала по сравнению с поперечной электронной подвижностью  $b_{i\perp} \ll b_{e\perp}$ . Такая ситуация типична, например, для плазмы МГД генераторов или нижней ионосферы.

Рассмотрим течение плазмы в канале, ограниченном бесконечными диэлектрическими стенками. Параллельно стенкам в направлении  $x$ , поперек магнитного поля, приложено электрическое поле  $\vec{E}_0$  (рис. 6.4). Граничное условие на диэлектрических стенках соответствует отсутствию тока в направлении  $y$ :  $j_y = 0$ . Исходное электрическое поле  $\vec{E}_0$  вызывает не только ток в направлении  $x$ , но и холловский ток электронов в направлении  $y$ . Поэтому

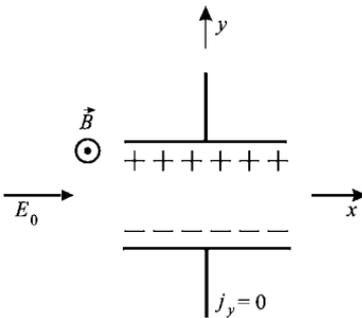


Рис. 6.4

Поляризация плазмы в канале с диэлектрическими стенками в немагнитной плазме

плазма поляризуется, как показано на рис. 6.4, и возникает дополнительное поле поляризации  $E_y$ . Ионные потоки как в направлении  $x$ , так и в направлении  $y$ , пренебрежимо малы и не дают вклад в ток. Для простоты мы пренебрежем также диффузионным электрическим полем (порядка  $T/eL$ ) по сравнению с полем  $E_0$ . Тогда возникшее в плазме электрическое поле

$E_y$  можно найти из условия отсутствия нормального к стенке тока:

$$j_y = -e(-b_{e\wedge} n E_0 - b_{e\perp} n E_y) = 0. \quad (6.22)$$

Поле  $E_y$ , найденное из (6.22), отрицательно:

$$E_y = E_0 b_{e\wedge} / b_{e\perp}. \quad (6.23)$$

Так как электроны замагничены, то  $b_{e\wedge} / b_{e\perp} \gg 1$  и поле поляризации оказывается значительно больше исходного поля  $E_0$ . Поле поляризации  $E_y$  вызывает дрейф электронов в направлении  $x$ , который, вместе с небольшим током, вызванным полем  $E_0$ , определяет полный ток:

$$j_x = -enb_{e\wedge} E_y + enb_{e\perp} E_0 = enE_0 (b_{e\wedge}^2 / b_{e\perp} + b_{e\perp}) = enb_{e\parallel} E_0. \quad (6.24)$$

Эффективная проводимость, т. е. коэффициент пропорциональности между плотностью тока и приложенным электрическим полем, таким образом, совпадает с продольной проводимостью  $\sigma_{\parallel} = eb_{e\parallel} n$ :

$$j_x = \sigma_{eff} E_0 = \sigma_{\parallel} E_0. \quad (6.25)$$

Другими словами, проводимость поперек магнитного поля «восстанавливается» и совпадает с проводимостью в отсутствие магнитного поля. При этом основной вклад в эффект восстановления проводимости вносит поле поляризации, которое в  $x_e$  раз превосходит исходное поле и вызывает холловский ток электронов.

Полученный результат является прямым следствием граничного условия  $j_y = 0$  на материальных поверхностях. В противоположном случае металлических поверхностей, накоротко замкнутых между собой, ток в направлении  $y$  может свободно течь и эффект восстановления проводимости отсутствует. Электрическое поле поляризации при этом не возникает, и ток вдоль оси  $x$  есть просто  $j_x = enb_{e\perp} E_0$ . Наряду с двумя предельными случаями разомкнутых поверхностей  $j_y = 0$  и короткозамкнутых поверхностей  $E_y = 0$  возможны, конечно, и промежуточные случаи конечного сопротивления, подключенного между пластинами. Зависимость эффективной проводимости плазмы от величины сопротивления нагрузки легко рассчитывается аналогичным образом.

## Глава 7. ПЕРЕНОС СИЛЬНОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 7.1. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Прежде всего продемонстрируем, что эволюция полностью ионизованной плазмы вдоль (в отсутствие) магнитного поля не является диффузионной. Для этого сложим два уравнения баланса сил для электронов и однозарядных ионов:

$$\begin{aligned} m_e n \frac{d\bar{u}_e}{dt} &= -\nabla p_e - en\bar{E} + \bar{R}_{ei}; \\ m_i n \frac{d\bar{u}_i}{dt} &= -\nabla p_i + en\bar{E} + \bar{R}_{ie}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Электрические силы и силы трения при сложении сокращаются, так что, пренебрегая электронной инерцией, получаем

$$m_i n \frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\nabla p, \quad (7.2)$$

где полное давление  $p = p_e + p_i$ .

Уравнение (7.2) описывает распространение возмущения со скоростью порядка скорости звука. Действительно, оценивая инерцию как  $m_i n V_i^2 / L$ , где  $L$  — характерный масштаб, и полагая  $\nabla p \sim p/L$ , получаем  $V_i \sim c_s = [(T_e + T_i)/m_i]^{1/2}$ , где  $c_s$  — скорость звука. Динамика полностью ионизованной плазмы без (вдоль) магнитного поля рассмотрена в главе 9.

Поперек же магнитного поля эволюция полностью ионизованной плазмы, так же как и для частично ионизованной плазмы, носит диффузионный характер. Градиент давления поперек магнитного поля уравновешивается си-

лой Лоренца, а радиальная скорость оказывается значительно меньше звуковой, так что инерцией в уравнении баланса сил можно пренебречь.

Рассмотрим диффузию в бесконечно длинном цилиндре, помещенном в сильное однородное магнитное поле, параллельное оси  $z$ . Пусть концентрация и температура плазмы зависят только от радиуса. Уравнения баланса сил в пренебрежении инерцией и вязкостью имеют вид (раздел 2.3)

$$\begin{aligned} -\nabla p_e + en\nabla\phi - \frac{en}{c}[\bar{u}_e \cdot \bar{B}] - nm_e v_{ei}(\bar{u}_e - \bar{u}_i) - \frac{3}{2} \frac{nv_{ei}}{\omega_{ce}} \left[ \frac{\bar{B}}{B} \cdot \nabla T_e \right] &= 0, \\ -\nabla p_i - en\nabla\phi + \frac{en}{c}[\bar{u}_i \cdot \bar{B}] + nm_e v_{ei}(\bar{u}_e - \bar{u}_i) + \frac{3}{2} \frac{nv_{ei}}{\omega_{ce}} \left[ \frac{\bar{B}}{B} \cdot \nabla T_e \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Складывая уравнения баланса сил, получаем условие равновесия:

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\bar{j} \cdot \bar{B}], \quad (7.4)$$

где  $p = n(T_e + T_i)$  — полное давление плазмы. Согласно этому уравнению градиент полного давления уравновешивается силой Лоренца, возникающей из-за протекания диамагнитного тока. Механизм его формирования обсуждался в главе 5. Выражая ток через магнитное поле с помощью уравнения Максвелла  $\nabla \cdot \bar{B} = (4\pi/c)\bar{j}$ , находим

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const} = \frac{B_0^2}{8\pi}, \quad (7.5)$$

где  $B_0$  — вакуумное магнитное поле. Как следует из этого соотношения, такое равновесие возможно, если

$$\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1. \quad (7.6)$$

При этом действительно можно пренебречь инерцией, а магнитное поле слабо возмущено диамагнитными токами.

Спроектируем уравнения баланса сил (7.3) на радиальное направление:

$$\begin{aligned} -\frac{dp_e}{dr} + en \frac{d\phi}{dr} - \frac{en}{c} u_{e\theta} B &= 0, \\ -\frac{dp_i}{dr} - en \frac{d\phi}{dr} + \frac{en}{c} u_{i\theta} B &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Радиальная сила трения отсутствует, так как радиальные скорости электронов и ионов должны совпадать, обратное означало бы протекание тока в радиальном направлении, что невозможно. Не дает вклад в радиальный баланс сил и термосила, которая направлена по азимуту.

Азимутальные скорости частиц согласно (7.7):

$$\begin{aligned} u_{e\theta} &= -\frac{c}{eBn} \frac{dp_e}{dr} + \frac{c}{B} \frac{d\phi}{dr} = u_{pe} + V_0, \\ u_{i\theta} &= \frac{c}{eBn} \frac{dp_i}{dr} + \frac{c}{B} \frac{d\phi}{dr} = u_{pi} + V_0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Эти скорости состоят из двух слагаемых. Первые слагаемые  $u_{pe}$ ,  $u_{pi}$  соответствуют диамагнитному потоку электронов и ионов, связанному с ларморовским вращением частиц в неоднородной плазме. Диамагнитный поток обсуждался в разделе 5.2 для частично ионизованной плазмы. Вторые слагаемые представляют собой совместный дрейф электронов и ионов в скрещенных радиальном электрическом и продольном магнитных полях со скоростью  $V_0$ .

Азимутальная проекция уравнений баланса сил дает

$$\begin{aligned} \frac{en}{c} u_{er} B - nm_e v_{ei} (u_{e\theta} - u_{i\theta}) - \frac{3}{2} \frac{nv_{ei}}{\omega_{ce}} \frac{dT_e}{dr} &= 0, \\ -\frac{en}{c} u_{ir} B + nm_e v_{ei} (u_{e\theta} - u_{i\theta}) + \frac{3}{2} \frac{nv_{ei}}{\omega_{ce}} \frac{dT_e}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Подставляя разность азимутальных скоростей из (7.8), получаем

$$u_{er} = u_{ir} = u_r = -\frac{c^2 m_e v_{ei}}{e^2 B^2 n} \frac{dp}{dr} + \frac{3}{2} \frac{v_{ei}}{\omega_{ce}} \frac{c}{eB} \frac{dT_e}{dr}. \quad (7.10)$$

Радиальные скорости электронов и ионов оказываются в этом приближении равными и не зависящими от величины радиального электрического поля. Иногда говорят, что, в отличие от случая частично ионизованной плазмы, перенос в полностью ионизованной плазме является автоматически амбиполярным.

Радиальную скорость частиц можно интерпретировать как дрейф под действием силы трения (рис. 7.1). Действительно, на ионы и электроны действуют азиму-

тальные силы трения, связанные с встречными диамагнитными скоростями, а также с термосилой. Эти силы вызывают дрейф частиц по радиусу со скоростями  $u_{ri} = cR_{ie\vartheta}/(eBn)$  для ионов и  $u_{re} = -cR_{ei\vartheta}/(eBn)$  — для электронов. Так как по третьему закону Ньютона силы, действующие на электроны и ионы, одинаковы по величине и различны по знаку, а знаки зарядов также различны, то  $u_{er} = u_{ir}$ .

Чтобы найти радиальное электрическое поле, необходимо учесть поправки, связанные с вязкостью. Так как азимутальная скорость ионов зависит от радиуса, то в азимутальном направлении на ионы действует вязкая сила, вызванная радиальным градиентом азимутальной скорости  $\partial u_{i\vartheta}/\partial r$ . В отсутствие градиента ионной температуры соответствующая сила, согласно (2.48), дается выражением

$$-(\nabla \cdot \vec{\pi})_{\vartheta} = \frac{d}{dr} \left[ \eta_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_{i\vartheta}) \right]. \quad (7.11)$$

Аналогичная сила, действующая на электроны, пренебрежимо мала. Дополнительная азимутальная сила, действующая только на ионы, приводит к появлению дополнительной радиальной скорости ионов и, следовательно, к радиальному току:

$$j_r = -\frac{1}{B^2} \frac{d}{dr} \left[ \eta_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \left( E_r - \frac{dp_i}{e n dr} \right) \right) \right]. \quad (7.12)$$

Так как в неоднородной плазме радиальный ток должен быть равен нулю, то устанавливается радиальное электрическое поле:

$$E_r = \frac{T_i}{e} \frac{d \ln n}{dr}, \quad (7.13)$$

соответствующее больцмановскому распределению для ионов. В плазме с неоднородной ионной температурой

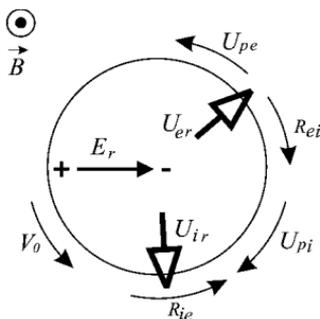


Рис. 7.1

Гидродинамические скорости частиц в цилиндре полностью ионизованной плазмы, ориентированном вдоль магнитного поля

в (7.13) появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное градиенту ионной температуры, вызванное вязкостью, связанной с ионным потоком тепла.

Радиальную скорость (7.10) можно переписать в виде

$$u_r = -D \frac{dn}{n dr} + \frac{D}{T_e + T_i} \left( \frac{1}{2} \frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_i}{dr} \right), \quad (7.14)$$

где коэффициент диффузии

$$D = \frac{c^2 m_e \nu_{ei} (T_e + T_i)}{e^2 B^2}. \quad (7.15)$$

Первый член в (7.14) соответствует диффузионному потоку, а второй член описывает термодиффузию. Коэффициент диффузии соответствует простой оценке

$$D \sim \rho_{ce}^2 \nu_{ei} \quad (7.16)$$

— порядка квадрата ларморовского радиуса электрона, умноженного на частоту столкновений. Коэффициент диффузии оказывается порядка электронного коэффициента температуропроводности и в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  меньше ионного коэффициента температуропроводности. Отметим, что ион-ионные столкновения не приводят к диффузии.

В полностью ионизованной плазме, в отличие от случая частично ионизованной плазмы, отсутствует проводимость поперек магнитного поля. Действительно, электрическое поле вызывает лишь совместный дрейф электронов и ионов в направлении  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ , при этом не возникает силы трения, дрейф под действием которой и является причиной подвижности в частично ионизованной плазме. Ток в направлении электрического поля возможен лишь в неоднородном электрическом поле, в этом случае он обусловлен вязкостью, как например, ток (7.12).

Особенностью классической диффузии поперек магнитного поля является тот факт, что коэффициент диффузии пропорционален концентрации, так как частота электрон-ионных столкновений пропорциональна концентрации. Уравнение диффузии поэтому является нелинейным. В изотермической плазме оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \varepsilon \Delta n^2 = 0,$$

$$D = 2\varepsilon n; \quad \varepsilon = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \frac{c^2 e^2 m_e^{1/2} (T_e + T_i) \Lambda}{B^2 T_e^{3/2}}. \quad (7.17)$$

Особенности диффузии в полностью ионизованной плазме проиллюстрируем на примере автомодельного решения (7.17). Рассмотрим одномерный плоский случай. Будем искать автомодельное решение в виде

$$n(x, t) = t^\gamma \tilde{n}(\xi); \quad \xi = x/t^\delta. \quad (7.18)$$

Перейдем к переменным  $\xi, t$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma t^{\gamma-1} \tilde{n} - \delta t^{\gamma-1} \xi \frac{d\tilde{n}}{d\xi},$$

$$\frac{d^2 n^2}{dx^2} = t^{2\gamma-2\delta} \frac{d^2 \tilde{n}^2}{d\xi^2}.$$

Уравнение диффузии сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, если степени  $t$  в первом и втором членах уравнения (7.17) совпадают, откуда получаем условие  $\gamma = 2\delta - 1$ . Еще одно соотношение следует из условия сохранения полного числа частиц:

$$\int n dx = \text{const} = t^{\delta+\gamma} \int \tilde{n} d\xi,$$

откуда  $\delta = -\gamma$ . Таким образом,

$$\delta = -\gamma, \quad n(x, t) = \frac{1}{t^{1/3}} \tilde{n}(x/t^{1/3}). \quad (7.19)$$

Функция  $\tilde{n}(\xi)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\varepsilon \frac{d^2 \tilde{n}^2}{d\xi^2} + \frac{\xi}{3} \frac{d\tilde{n}}{d\xi} + \frac{\tilde{n}}{3} = 0. \quad (7.20)$$

Его решение есть

$$\tilde{n}(\xi) = \frac{1}{12\varepsilon} (C - \xi^2).$$

В исходных переменных решение удобно записать, выразив константу интегрирования через отношение двух констант:

$$n(x, t) = \frac{a^2}{12\varepsilon t^{1/3} t_0^{2/3}} \left(1 - \frac{x^2 t_0^{2/3}}{a^2 t^{2/3}}\right). \quad (7.21)$$

Согласно полученному решению концентрация обращается в ноль на конечном расстоянии, в момент времени  $t = t_0$  концентрация обращается в ноль при  $x = a$ . Это обстоятельство является следствием того факта, что коэффициент диффузии стремится к нулю при уменьшении концентрации. С течением времени характерный масштаб концентрации растет как  $t^{1/3}$ , а концентрация, соответственно, падает как  $t^{1/3}$ . Аналогичным образом может быть построено решение и в цилиндрической геометрии.

## 7.2. ПЕРЕНОС ПРИМЕСЕЙ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим примесь тяжелых ионов с концентрацией  $n_I$  и зарядовым числом  $Z$  в цилиндрической геометрии, такой же, как в предыдущем параграфе. Концентрацию основных однозарядных ионов будем обозначать  $n_i$ . Основная сила трения, действующая на ионы примеси, связана со столкновениями с основными ионами, трением же об электроны можно пренебречь. При этом, так как  $m_i \ll m_I$ , то сила трения, связанная с относительной скоростью, и термосила имеют тот же вид, что и для электрон-ионных столкновений (ср. с формулами раздела 2.3):

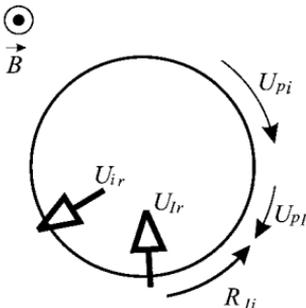


Рис. 7.2  
Гидродинамические  
скорости основных ионов  
и примесей

$$\begin{aligned} \bar{R}_{iI}^u &= -n_i m_i v_{iI} (\bar{u}_i - \bar{u}_I), \\ \bar{R}_{iI}^T &= -\frac{3}{2} n_i \frac{v_{iI}}{\omega_{cI}} \left[ \frac{\bar{B}}{B} \cdot \nabla T_i \right], \\ v_{iI} &= \frac{4\sqrt{2}\pi e^4 Z^2 \Lambda n_I}{3\sqrt{m_i T_i^{3/2}}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Азимутальные потоки ионов примеси получаются из радиального уравнения баланса сил так же, как для основных ионов:

$$u_{I\theta} = \frac{c}{eZBn_I} \frac{dp_I}{dr} + \frac{c}{B} \frac{d\phi}{dr} = u_{pI} + V_0. \quad (7.23)$$

Диамагнитные потоки основных ионов и ионов примеси показаны на рис. 7.2. При условии

$$\left| \frac{d \ln n_i}{dr} \right| \gg \left| \frac{1}{Z} \frac{d \ln n_I}{dr} \right| \quad (7.24)$$

диамагнитная скорость ионов примеси значительно меньше диамагнитной скорости основных ионов. Поэтому в плазме с однородной ионной температурой сила трения вызывает дрейф ионов примеси внутрь плазменного шнура. В общем же случае уравнение азимутального баланса сил для примеси с учетом (7.23) и (7.8) имеет вид

$$\frac{eZn_I}{c} u_{Ir} B + n_i m_i v_{iI} (u_{i\theta} - u_{I\theta}) + \frac{3}{2} \frac{n_i v_{iI}}{\omega_{ci}} \frac{dT_i}{dr} = 0. \quad (7.25)$$

Из последнего уравнения находим радиальный поток ионов примеси:

$$\Gamma_{Ir} \equiv n_I u_{Ir} = - \frac{n_i m_i v_{iI} c^2 T_i}{Ze^2 B^2} \left( \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} - \frac{1}{Zn_I} \frac{dn_I}{dr} - \frac{1}{2} \frac{dT_i}{dr} \right). \quad (7.26)$$

Поток (7.26) имеет диффузионную и конвективную части. При условии (7.24) практически весь поток примеси является конвективным и направлен внутрь плазменного шнура. В отсутствие источников и стоков примесь будет собираться в центре до тех пор, пока поток не обратится в ноль. Стационарный профиль концентрации примеси оказывается чрезвычайно пикированным:

$$n_i = A n_i^Z T_i^{-Z/2}. \quad (7.27)$$

Радиальный поток ионов примеси не приводит к появлению дополнительного электрического поля. Действительно, так как азимутальные силы трения  $R_{iI\theta}$  и  $R_{Ii\theta}$  отличаются знаком, то

$$Z\Gamma_{Ir} = \Gamma_{ir}. \quad (7.28)$$

Возникающий противоток основных ионов в  $Z$  раз больше потока ионов примеси. В результате радиальный ток равен нулю и наличие примесей не влияет на величину самосогласованного электрического поля.

### 7.3. ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА С НЕОДНОРОДНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ НЕЙТРАЛОВ

Более сложным объектом является неоднородность частично ионизованной плазмы, удерживаемой магнитным полем. В отличие от главы 5, будем считать нейтральный газ сильно неоднородным. Под действием градиента давления газ стремится свободно расширяться со скоростями порядка скорости звука. Однако уже при весьма небольшой степени ионизации такое расширение в столкновительной плазме может быть остановлено за счет взаимодействия токов по плазме с внешним магнитным полем.

Проанализируем диффузию слабоионизованного шнура плазмы, ориентированного вдоль магнитного поля. Будем считать выполненным два условия. Во-первых,

$$\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1, \quad (7.29)$$

где теперь в отличие от раздела 7.1  $p = p_N + p_e + p_i$  — полное давление, являющееся суммой парциальных давлений нейтральных частиц, электронов и ионов. Во-вторых, будем считать, что длина свободного пробега нейтралов относительно столкновений с ионами  $\lambda_{Ni}$  меньше характерного размера неоднородности  $L$ :

$$\lambda_{Ni} \ll L. \quad (7.30)$$

Покажем, что при выполнении этих двух условий нейтральный газ удерживается за счет взаимодействия магнитного поля с небольшим количеством заряженных частиц, а эволюция концентрации нейтральных частиц носит диффузионный характер.

Уравнения баланса сил для нейтральных и заряженных частиц имеют вид (вязкостью и электронной инерцией пренебрегаем)

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p_e - en\vec{E} + \vec{R}_{ei} + \vec{R}_{eN} - \frac{en}{c}[\vec{u}_e \cdot \vec{B}]; \\ m_i n \frac{d\vec{V}_i}{dt} &= -\nabla p_i + en\vec{E} + \vec{R}_{ie} + \vec{R}_{iN} + \frac{en}{c}[\vec{u}_i \cdot \vec{B}]; \\ m_N n_N \frac{d\vec{V}_N}{dt} &= -\nabla p_N + \vec{R}_{Ni} + \vec{R}_{Ne}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Складывая три уравнения, получаем

$$(m_N n_N \frac{d\vec{V}_N}{dt} + m_i n \frac{d\vec{V}_i}{dt}) = -\nabla p + \frac{1}{c} [\vec{j} \cdot \vec{B}]. \quad (7.32)$$

Условие пренебрежения инерцией означает, что

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\vec{j} \cdot \vec{B}]. \quad (7.33)$$

Выражая ток через магнитное поле с помощью уравнения Максвелла, приходим к уравнению (7.5) и условию равновесия (7.29). В это условие входит теперь давление нейтрального газа. В плазме с малой степенью ионизации это неравенство гораздо жестче, чем аналогичное неравенство (7.6) в полностью ионизованной плазме.

Механизм установления равновесия проанализируем из уравнений баланса сил (7.31). Учтем только самую большую силу трения между ионами и нейтралами. Радиальная проекция баланса сил для нейтральных частиц в пренебрежении инерцией дает (термосилой пренебрегаем)

$$\frac{dp_N}{dr} = R_{Nir} = -m_N n_N v_{Ni} u_{Nr}, \quad (7.34)$$

где частота столкновений  $v_{Ni} = n \langle V \sigma \rangle_{Ni}$  пропорциональна концентрации заряженных частиц. Радиальная скорость ионов положена равной нулю, это условие является следствием отсутствия радиального тока в плазме. Радиальная скорость нейтралов согласно (7.34) равна

$$u_{Nr} = -\frac{1}{nm_N \langle V \sigma \rangle_{Ni}} \frac{dp_N}{dr}. \quad (7.35)$$

При условии (7.30) эта скорость мала по сравнению со скоростью звука и процесс эволюции нейтралов носит диффузионный характер.

Из азимутального баланса сил для ионов и отсутствия радиальной ионной скорости следует условие  $R_{iN\theta} = 0$ , то есть азимутальные скорости ионов и нейтралов должны совпадать:

$$u_{N\theta} = u_{i\theta}. \quad (7.36)$$

Из радиального баланса сил для ионов имеем

$$-\frac{dp_i}{dr} + enE_r + \frac{en}{c} u_{i\theta} B + R_{iNr} = 0. \quad (7.37)$$

Радиальная сила трения между ионами и нейтралами, согласно (7.34), уравнивается градиентом давления нейтралов. Поэтому из (7.37) получаем

$$E_r + \frac{1}{c} u_{i9} B = \frac{dp}{e n d r}. \quad (7.38)$$

Уравнение (7.38) справедливо при любой совместной азимутальной скорости ионов и нейтралов. В отсутствие каких-либо сил, раскручивающих плазму и нейтральный газ в азимутальном направлении, эта скорость обращается в ноль за счет действия вязкости. В результате устанавливается радиальное поле:

$$E_r = \frac{dp}{e n d r}, \quad (7.39)$$

направленное от периферии к центру. Это поле во много раз больше, чем поле (7.13), из-за малой степени ионизации, если  $p_N \gg p_i$ . Большое радиальное поле вызывает дрейф электронов в азимутальном направлении, которые и создают азимутальный ток (7.33) при покоящихся ионах. Учет электрон-нейтрального трения приводит к дополнительной совместной классической диффузии электронов и ионов, описанной в разделе 7.1.

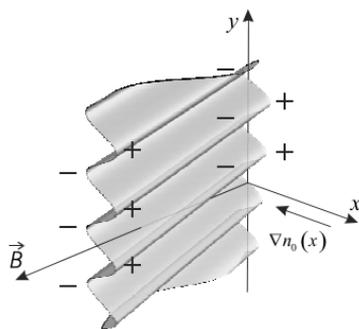
## Глава 8. ДРЕЙФОВЫЕ ВОЛНЫ И ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС

### 8.1. ДРЕЙФОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

**В** неоднородной плазме в магнитном поле могут распространяться волны поперек магнитного поля, связанные с неоднородностью параметров плазмы. Рассмотрим полностью ионизованную плазму с неоднородной концентрацией вдоль оси  $x$ ,  $n_0(x)$  (рис. 8.1). Однородное магнитное поле перпендикулярно градиенту концентрации и направлено вдоль оси  $z$ . Температуры заряженных частиц будем считать постоянными  $T_{e,i} = \text{const}(x)$ . Рассмотрим возмущение концентрации периодическое вдоль  $y$  и  $z$ :

$$n^1 = A(x)\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z). \quad (8.1)$$

Будем рассматривать задачу в так называемом локальном приближении, т. е. будем считать, что характерный масштаб невозмущенной плазмы в направлении  $x$  удовлетворяет условию  $k_y L_x \gg 1$ . Масштаб возмущения в направлении  $x$  тоже велик, и если выполнить разложение Фурье по  $x$ , то  $k_x \ll k_y$ . В то же время должно быть  $k_x^{-1} < L_x$ . Пусть длина волны в направлении  $z$  достаточно велика, так что  $k_z \ll k_y$ . В то же время длины волн в направлении  $y$  и  $z$  должны быть больше соответственно ларморовского радиуса ионы и длины



**Рис. 8.1**  
Поверхности постоянной концентрации при распространении дрейфовой волны

пробега, чтобы было применимо гидродинамическое описание.

Продольная компонента баланса сил для электронов в первом приближении (в пренебрежении электронной инерцией и силой трения) сводится к равенству градиента электронного давления и продольной электрической силы, что соответствует бoльцмановскому распределению для электронов:

$$\phi^1 = \frac{T_e}{e} \ln \left( \frac{n_0 + n^1}{n_0} \right) = \frac{T_e}{e} \frac{n^1}{n_0}. \quad (8.2)$$

Таким образом, положительное возмущение концентрации соответствует положительному возмущению потенциала, а отрицательное возмущение концентрации заряжается отрицательно (см. рис. 8.1). Градиент ионного давления и электрическое поле вызывают движение ионов вдоль магнитного поля. Будем, однако, считать, что продольное смещение ионов за время  $\omega^{-1}$  мало по сравнению с  $k_z^{-1}$ ; соответствующий критерий приведен ниже. Соответственно, продольным движением ионов пренебрегаем.

Поперечные же скорости электронов и ионов представляют собой (в пренебрежении ионной инерцией) дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях и диамагнитные скорости

$$\begin{aligned} \bar{u}_{e\perp}^1 &= c \frac{[\vec{E}^1 \cdot \vec{B}]}{B^2} + \frac{cT_e[\nabla n^1 \cdot B]}{en_0 B^2}, \\ \bar{u}_{i\perp}^1 &= c \frac{[\vec{E}^1 \cdot \vec{B}]}{B^2} - \frac{cT_i[\nabla n^1 \cdot B]}{en_0 B^2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Дивергенция диамагнитных потоков в однородном магнитном поле равна нулю, поэтому в уравнения непрерывности дают вклад только скорости дрейфов:

$$\bar{u}_{ed} = \bar{u}_{id} = \bar{u}_d = c \frac{[\vec{E} \cdot \vec{B}]}{B^2}. \quad (8.4)$$

Учтем свойство несжимаемости дрейфовых движений в однородном магнитном поле:

$$\nabla_{\perp} \cdot \left( \frac{c[\vec{E} \cdot \vec{B}]}{B^2} \right) = 0. \quad (8.5)$$

Это равенство нетрудно проверить непосредственно для потенциального электрического поля. Поэтому уравнение непрерывности принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{u}_d \nabla_{\perp} n = 0. \quad (8.6)$$

Линеаризуя это уравнение, получаем

$$-i\omega n^1 + u_{dx}^1 \frac{dn_0}{dx} = 0. \quad (8.7)$$

Согласно (8.4)  $u_{dx}^1 = cE_y^1 / B = -ik_y c\phi^1 / B$ . Подставляя выражение для потенциала (8.2), получаем из (8.7) дисперсионное уравнение:

$$\omega = \omega_d = -k_y \frac{cT_e}{eB} \frac{d \ln n_0}{dx}. \quad (8.8)$$

Величина  $\omega_d$  называется дрейфовой частотой.

Таким образом, возмущение концентрации испытывает колебания с дрейфовой частотой и перемещается в направлении  $y$  с фазовой скоростью

$$V_{py} = \frac{\omega_d}{k_y} = -\frac{cT_e}{eB} \frac{d \ln n_0}{dx}, \quad (8.9)$$

которая совпадает со скоростью диамагнитного дрейфа электронов. Частицы же в волне перемещаются за счет дрейфа в электрическом поле  $E_y$  в направлении  $x$ , что на фоне неоднородной плотности  $n_0(x)$  приводит к распространению дрейфовой волны вдоль  $y$ . Частота волны оказывается чисто вещественной, так как электрическое поле  $E_y^1$  и дрейф частиц  $u_{dx}^1 = cE_y^1 / B$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  относительно возмущения концентрации. Поэтому концентрация изменяется в узлах, что проявляется как перемещение волны плотности вдоль оси  $y$ . В направлении  $z$  волна также распространяется с фазовой скоростью  $V_{pz} = \omega_d / k_z$ .

Приведенный выше вывод справедлив при выполнении следующего неравенства:

$$\sqrt{\frac{T_e + T_i}{m_i}} \ll \frac{\omega_d}{k_z} \ll \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}. \quad (8.10)$$

Левая часть неравенства позволяет пренебречь продольной скоростью ионов в уравнении непрерывности,

а правая часть обеспечивает установление больцмановского распределения для электронов и позволяет пренебречь продольной электронной инерцией. Подставляя дрейфовую частоту в левую часть неравенства (8.10), получаем условие

$$k_z \ll k_y \rho_{ci} / L_x. \quad (8.11)$$

Так как ларморовский радиус ионов  $\rho_{ci} \ll L_x$ , то это условие может быть выполнено только при весьма малых значениях  $k_z \ll k_y$ . При нарушении левой части неравенства (8.10) поперечное движение частиц становится несущественным по сравнению с продольным и дрейфовая волна переходит в другой вид колебаний — ионно-звуковую волну, которая будет рассмотрена позднее. Отметим также, что если так называемая альфвеновская скорость  $c_A = (B^2 / 4\pi n_0 m_i)^{1/2}$  оказывается меньше тепловой скорости электронов, то правая часть неравенства (8.10) переходит в более жесткое условие  $\omega_d / k_z \ll c_A$ . В обратном случае дрейфовая волна переходит в альфвеновскую волну, которая также будет проанализирована позднее.

При выводе мы по умолчанию предполагали, что в плазме отсутствует невозмущенное электрическое поле в направлении неоднородности. На самом деле такое поле существует и в плазме с однородной температурой дается выражением (7.13) (для плоской геометрии  $E_x = (T_i/e) d \ln n_0 / dx$ ). Это поле вызывает дрейф плазмы как целого вдоль оси  $y$  со скоростью  $V_0 = -cE_x/B$ . Частота (8.8) представляет собой частоту колебаний в неподвижной плазме, с учетом же дрейфа плазмы

$$\omega = \omega_d + k_y V_0, \quad (8.12)$$

т. е. возникает доплеровский сдвиг частоты. Фазовая скорость (8.9) также вычислена относительно движущейся плазмы, в лабораторной же системе фазовая скорость

$$V_{py} = \frac{\omega_d}{k_y} + V_0 = -\frac{c(T_e + T_i)}{eB} \frac{d \ln n_0}{dx} \quad (8.13)$$

возрастает и по-прежнему направлена в сторону диамагнитного дрейфа электронов.

## 8.2. ДРЕЙФОВО-ДИССИПАТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Так как частота дрейфовых волн, найденная в предыдущем разделе, получилась чисто вещественной, то необходимо учесть малые отброшенные члены, чтобы решить вопрос о том, раскачивается такая волна или затухает. Мы учтем продольную силу трения между электронами и ионами и инерцию ионов. По-прежнему проведем рассмотрение в движущейся в направлении  $y$  со скоростью  $V_0$  системе отсчета, в которой невозмущенное электрическое поле отсутствует.

Продольную скорость электронов найдем из уравнения продольного баланса сил для электронов (продольной скоростью ионов по-прежнему пренебрегаем в соответствии с условием (8.10)):

$$-T_e \frac{\partial n}{\partial z} - enE_z - 0,51nm_e v_{ei} u_{ez} = 0. \quad (8.14)$$

После линеаризации имеем

$$-ik_z T_e n^1 + ik_z en_0 \phi^1 - 0,51n_0 m_e v_{ei} u_{ez}^1 = 0, \quad (8.15)$$

откуда продольная скорость электронов

$$u_{ez}^1 = -\frac{ik_z T_e}{0,51m_e v_{ei}} \left( \frac{n^1}{n_0} - \frac{e\phi^1}{T_e} \right). \quad (8.16)$$

Компонент же скорости электронов в направлении  $x$  за вычетом диамагнитной скорости по-прежнему представляет собой дрейф в скрещенных полях:

$$u_{edx}^1 = -\frac{ick_y \phi^1}{B}. \quad (8.17)$$

Линеаризованное уравнение непрерывности для электронов теперь с учетом продольной скорости электронов имеет вид

$$-i\omega n^1 + ik_z n_0 u_{ez}^1 + u_{edx}^1 \frac{dn_0}{dx} = 0. \quad (8.18)$$

Подставляя в это уравнение выражения для скоростей (8.16) и (8.17), получаем

$$\left( \omega + i \frac{k_z^2 T_e}{0,51 m_e v_{ei}} \right) n^1 + \left( -\omega_d - i \frac{k_z^2 T_e}{0,51 m_e v_{ei}} \right) \frac{e \phi^1}{T_e} = 0. \quad (8.19)$$

Для ионов продольную скорость полагаем нулем  $u_{i\parallel} = 0$ . Поперечную же скорость находим из линеаризованного уравнения поперечного баланса сил:

$$n_0 m_i \frac{\partial \bar{u}_i^1}{\partial t} = -T_i \nabla n^1 + e n_0 \bar{E}^1 + \frac{1}{c} n_0 [\bar{u}_i^1 \cdot \bar{B}]. \quad (8.20)$$

В пренебрежении инерцией скорость ионов соответствует обращению в ноль правой части (8.20) и представляет собой, согласно (8.3), сумму диамагнитной скорости и скорости дрейфа. После подстановки скорости (8.3) в левую часть (8.20), умножив получившееся уравнение векторно на  $\bar{B}$ , можно найти скорость ионов в следующем приближении:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i\perp}^1 = & c \frac{[\bar{E}^1 \cdot \bar{B}]}{B^2} + \frac{c^2 m_i}{e B^2} \frac{\partial \bar{E}^1}{\partial t} - \\ & - \frac{c T_i [\nabla n^1 \cdot \bar{B}]}{e n_0 B^2} - \frac{c^2 m_i}{e^2 B^2} \frac{\partial T_i \nabla n^1}{\partial t} \frac{1}{n_0}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Дивергенция потоков, связанных с последними двумя членами, равна нулю, поэтому в уравнение непрерывности для ионов входит только скорость дрейфа:

$$\begin{aligned} u_{idx}^1 &= -\frac{ick_y \phi^1}{B}; \\ u_{idy}^1 &= \frac{c^2 m_i}{e B^2} \frac{\partial E_y^1}{\partial t} = -\frac{i \omega c^2 m_i}{e B^2} E_y^1 = -\frac{c^2 m_i}{e B^2} \omega k_y \phi^1. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Подставляя (8.22) в линеаризованное уравнение непрерывности для ионов,

$$-i \omega n^1 + u_{idx}^1 \frac{dn_0}{dx} + ik_y n_0 u_{idy}^1 = 0, \quad (8.23)$$

получаем

$$\omega \frac{n^1}{n_0} + \left( -\omega_d + \omega \frac{k_y^2 c^2 m_i T_e}{e^2 B^2} \right) \frac{e \phi^1}{T_e} = 0. \quad (8.24)$$

Система уравнений (8.19) и (8.24) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Прирав-

нивая нулю определитель, получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 + i\omega \left( \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\omega_{ce}\omega_{ci}}{0,51v_{ei}} + \frac{k_z^2 T_e}{m_e 0,51v_{ei}} \right) - i\omega_d \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\omega_{ce}\omega_{ci}}{0,51v_{ei}} = 0. \quad (8.25)$$

Вторым членом в скобках в гидродинамическом приближении при условии  $k_y \rho_{ci} \ll 1$  можно пренебречь. Вводя обозначение

$$\omega_s = \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\omega_{ce}\omega_{ci}}{0,51v_{ei}}, \quad (8.26)$$

перепишем дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^2 + i\omega\omega_s - i\omega_d\omega_s = 0. \quad (8.27)$$

Проанализируем два предельных случая  $\omega_s \gg \omega_d$  и  $\omega_s \ll \omega_d$ . В первом случае дисперсионное уравнение имеет корни

$$\omega_1 = \omega_d + i\omega_d^2/\omega_s; \quad \omega_2 = -i\omega_s. \quad (8.28)$$

При малых  $\omega_s$

$$\omega_{1,2} = \pm(1+i)(\omega_d\omega_s/2)^{1/2}. \quad (8.29)$$

В обоих случаях первый корень соответствует неустойчивости, инкремент нарастания

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega_d^2/\omega_s; \quad \omega_s \gg \omega_d, \\ \gamma &= (\omega_d\omega_s/2)^{1/2}; \quad \omega_s \ll \omega_d. \end{aligned} \quad (8.30)$$

В наиболее интересном случае слабостолкновительной плазмы  $\omega_s \gg \omega_d$  инкремент является малым по сравнению с вещественной частью частоты  $\omega_d$ . При уменьшении частоты столкновений, когда длина пробега электронов сравнивается с длиной волны  $k_z(T_e/m_e)^{1/2}/v_{ei} \sim 1$ , отношение мнимой части частоты к вещественной очень мало:  $\omega_d/\omega_s \sim \omega_d/(k_z(T_e/m_e)^{1/2})k_y^2\rho_{ci}^2 \ll 1$ .

Таким образом, при учете столкновений дрейфовая волна, рассмотренная в предыдущем разделе, нарастает с инкрементом (8.30). Физическая картина развития неустойчивости состоит в следующем: в отсутствие продольной силы трения возмущение потенциала совпадает по фазе с возмущением концентрации, а возмущение электрического поля и дрейф частиц вдоль оси  $x$  сдвинуты на  $\pi/2$ .

Поэтому нарастание плотности происходит в узлах волны и ее частота остается вещественной. При учете же силы трения появляется сдвиг фаз между возмущениями потенциала и концентрации и, соответственно, сдвиг по фазе возмущения электрического поля относительно возмущения концентрации отличается от  $\pi/2$ . Поэтому в области максимумов возмущения концентрации все время происходит нарастание плотности за счет поперечного дрейфа частиц на неоднородном фоне, что проявляется как неустойчивость. Отметим, что в лабораторной системе отсчета к вещественной части частоты по-прежнему добавляется доплеровский сдвиг  $k_y V_0$ , связанный с движением плазмы под действием фонового электрического поля.

### 8.3. УНИВЕРСАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В слабостолкновительной плазме, когда длина свободного пробега электронов превосходит  $k_z^{-1}$ , гидродинамическое приближение, рассмотренное в предыдущем разделе, перестает быть применимым. Тем не менее в бесстолкновительной плазме дрейфовые волны также неустойчивы, при этом аналогом силы трения является затухание Ландау, а соответствующая неустойчивость называется универсальной. Воспользуемся для анализа электронной компоненты кинетическим уравнением в дрейфовом приближении (см. раздел 1.7). В однородном магнитном поле ведущие центры частиц дрейфуют в поперечном электрическом поле и испытывают продольное движение. Поэтому уравнение (1.99) для электронов имеет простой вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{c[\vec{E} \cdot \vec{B}]}{B^2} \nabla_{\perp} f - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V_z} = St. \quad (8.31)$$

В правой части необходимо сохранить столкновительный член, несмотря на то, что столкновения весьма редки.

Будем искать решение в виде  $f = f_0 + f^1$ , где  $f_0$  — невозмущенная функция распределения, соответствующая не-

однородному профилю концентрации  $n_0(x)$ , а  $f^1 \sim \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$  — малая поправка. Линеаризуя кинетическое уравнение для электронов, имеем

$$-i\omega f^1 + ik_z V_z f^1 + \frac{cE_y^1}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z^1}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} = St^1. \quad (8.32)$$

Здесь  $\vec{E}^1 = -i\vec{k}\phi^1$  — электрическое поле волны. Для столкновительного члена выберем упрощенное модельное представление  $St^1 = -\nu f^1$ . На самом деле столкновительный член имеет вид интеграла столкновений Ландау, однако оказывается, что от вида столкновительного члена и величины  $\nu$  результат не зависит ввиду стремления частоты столкновений к нулю. Из (8.32) имеем для поправки к функции распределения

$$f^1 = \frac{\phi^1}{\omega - k_z V_z + i\nu} \left[ -\frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{ek_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right]. \quad (8.33)$$

Функция распределения имеет вещественную и мнимую часть. Перепишем множитель в (8.33), умножив числитель и знаменатель на комплексно сопряженное значение, в виде двух слагаемых:

$$\frac{1}{\omega - k_z V_z + i\nu} = \frac{\Omega - k_z V_z}{(\Omega - k_z V_z)^2 + (\gamma + \nu)^2} - \frac{i(\nu + \gamma)}{(\Omega - k_z V_z)^2 + (\nu + \gamma)^2}.$$

Здесь  $\omega = \Omega + i\gamma$ . Инкремент  $\gamma$  в универсальной неустойчивости значительно меньше вещественной части частоты  $\Omega$ . Слагаемые по-разному ведут себя вблизи резонансной точки  $\Omega = k_z V_z$ . Первое вещественное слагаемое обращается в этой точке в ноль и при  $\nu \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  антисимметрично относительно резонансной точки. Второе же мнимое слагаемое при  $\nu \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  мало всюду, кроме окрестности резонансной точки, где оно стремится к бесконечности. Эти особенности проявляются при вычислении макроскопических величин. Вещественная часть возмущения концентрации при  $\nu \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  равна интегралу, вычисленному в смысле главного значения:

$$\text{Re}(n^1) = V.P. \int \frac{\phi^1}{\Omega - k_z V_z} \left[ -\frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{ek_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right] dV_z d\vec{V}_\perp. \quad (8.34)$$

Так как частота порядка дрейфовой, то, в соответствии с условием (8.10), полагаем  $\Omega \ll |k_z V_z|$  и  $\Omega - k_z V_z \sim k_z V_z$ . Соответственно

$$\operatorname{Re}(n^1) = V \cdot P \cdot \int_{V_z}^{\phi^1} \left[ \frac{ck_y}{k_z B} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right] dV_z d\vec{V}_\perp. \quad (8.35)$$

Выбирая в качестве невозмущенной функции распределения максвелловскую функцию распределения, получаем, что первое слагаемое в (8.35) обращается в ноль в силу нечетности подынтегрального выражения. Во втором слагаемом  $\partial f_0 / \partial V_z = -m_e V_z f_0 / T_e$ , поэтому особенность исчезает, и интеграл легко вычисляется:

$$\operatorname{Re}(n^1) = \frac{e\phi^1}{T_e} n_0. \quad (8.36)$$

Таким образом, вещественная часть возмущения концентрации соответствует больцмановскому распределению для электронов.

При вычислении мнимой части возмущения концентрации заметим, что подынтегральная функция имеет резкий максимум в окрестности резонансной точки. Поэтому значение подынтегральной функции за исключением резонансного множителя можно брать при  $V_z = \Omega / k_z$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(n^1) &= \\ &= \int \frac{v + \gamma}{(\Omega - k_z V_z)^2 + (v + \gamma)^2} \phi^1 \left[ -\frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{ek_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right]_{V_z = \Omega / k_z} dV_z d\vec{V}_\perp. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v + \gamma}{(\Omega - k_z V_z)^2 + (\gamma + v)^2} dV_z = \frac{\pi}{|k_z|},$$

получаем

$$\operatorname{Im}(n^1) = \frac{e\phi^1}{T_e} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{m_e}}{|k_z| \sqrt{T_e}} (\omega - \omega_d) \right] \cdot n_0. \quad (8.38)$$

Резонансный множитель в (8.33) при  $v \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  принято записывать в виде

$$\frac{1}{\omega - k_z V_z} = P\left(\frac{1}{\omega - k_z V_z}\right) - i\pi\delta(\omega - k_z V_z). \quad (8.39)$$

Такая запись означает, что интегралы с таким множителем следует брать следующим образом: с первым слагаемым в смысле главного значения, а со вторым слагаемым — с  $\delta$ -функцией.

Окончательно, объединяя (8.36) и (8.38):

$$n^1 = \frac{e\phi^1}{T_e} \left[ 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{m_e}}{|k_z|\sqrt{T_e}} (\omega - \omega_d) \right] n_0. \quad (8.40)$$

Результат не зависит от частоты столкновений, что оправдывает выбор модельного столкновительного члена. Мнимая поправка в (8.40) возникает из-за трения резонансных частиц о волну — явление, известное как «затухание Ландау».

Для получения дисперсионного уравнения необходимо найти связь между возмущениями концентрации и потенциала также и из ионного уравнения. Так как продольным движением ионов в силу неравенства (8.10) можно пренебречь, то уравнение для ионов совпадает с уравнением гидродинамического приближения (8.24), полученного в предыдущем разделе. Приравнявая к нулю определитель системы уравнений (8.24), (8.40) и учитывая, что мнимая поправка к частоте мала, получаем

$$\Omega = \omega_d \left( 1 - \frac{k_y^2 c^2 m_i T_e}{e^2 B^2} \right); \quad \frac{\gamma}{\omega_d} = \frac{\sqrt{\pi} \omega_d}{|k_z| \sqrt{2T_e/m_e}} \frac{k_y^2 c^2 m_i T_e}{e^2 B^2} \ll 1. \quad (8.41)$$

Максимально возможный инкремент достигается при  $k_y \rho_{ci} \sim 1$  и равен  $\gamma/\omega_d \sim \omega_d / (k_z \sqrt{2T_e/m_e}) \ll 1$ . Он резко падает с уменьшением  $k_y$ . Таким образом, в слабостолкновительном режиме дрейфовая волна является неустойчивой с инкрементом, малым по сравнению с дрейфовой частотой. На границе применимости при  $k_z \lambda_{ei} \sim 1$  инкремент (8.41) переходит в первое из выражений (8.30).

#### 8.4. НЕУСТОЙЧИВОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотренные в предыдущем разделе дрейфовые неустойчивости имеют достаточно малый инкремент, который существенно меньше дрейфовой частоты. Поэтому более опасными являются неустойчивости, вызванные градиентом температуры. Рассмотрим ионно-температурную дрейфовую неустойчивость, вызванную градиентом ионной температуры, которая в значительной степени ответственна за перенос частиц и энергии в установках для управляемого синтеза.

Для простоты рассмотрим ситуацию, когда имеется только градиент ионной температуры, а градиенты концентрации и электронной температуры отсутствуют:  $dT_i^0/dx \neq 0$ ,  $dn_0/dx = dT_e^0/dx = 0$ . Покажем, что в этом случае раскачивается ионная дрейфово-температурная неустойчивость, частота которой лежит в диапазоне

$$k_z(T_i + T_e)^{1/2} / m_i^{1/2} \ll |\omega| \ll k_y c e^{-1} B^{-1} |dT_i/dx|.$$

Как и ранее, поперечная длина волны удовлетворяет условию применимости гидродинамического описания  $k_y \rho_{ci} \ll 1$ . Плазму для простоты будем считать бесстолкновительной.

В этой волне поперечный дрейф ионов в возмущенном потенциале на фоне неоднородного профиля ионной температуры приводит к возмущению ионной температуры. Возникающий при этом продольный градиент давления вызывает движение ионов вдоль магнитного поля, которое, в свою очередь, возмущает концентрацию и, вследствие больцмановского распределения электронов, приводит к возмущению потенциала. Уравнение для ионной температуры выберем в виде (2.12), в котором отброшены диссипативные слагаемые, связанные с теплопроводностью и теплообменом, при этом соответствующие времена предполагаются большими по сравнению с  $\omega^{-1}$ . Имеем

$$\frac{3}{2} n \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_i \nabla) \right] T_i + n T_i \nabla \cdot \vec{u}_i = 0. \quad (8.42)$$

Линеаризованные уравнения непрерывности, баланса продольного момента и тепла для ионов имеют вид

$$\begin{aligned} -i\omega n^1 + ik_z n_0 u_{iz}^1 &= 0, \\ -i\omega n_0 m_i u_{iz}^1 &= -ik_z (n_0 T_i^1 + n^1 T_i^0) - ik_z e n_0 \phi^1, \\ -i\omega n_0 T_i^1 - ik_y n_0 \frac{c\phi^1}{B} \frac{dT_i^0}{dx} + ik_z n_0 T_i^0 u_{iz}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.43)$$

С учетом больцмановского распределения для электронов

$$\frac{n^1}{n_0} = \frac{e\phi^1}{T_e^0} \quad (8.44)$$

получается замкнутая система уравнений. Приравнивая к нулю ее определитель и учитывая, что

$$k_z (T_i + T_e)^{1/2} / m_i^{1/2} \ll |\omega|,$$

получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega^3 = -k_z^2 \frac{T_e}{m_i} k_y \frac{c}{eB} \frac{d \ln T_i}{dx}. \quad (8.45)$$

Уравнение (8.45) имеет один вещественный и два мнимых корня, при этом один из мнимых корней соответствует инкременту

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( k_z^2 \frac{T_e}{m_i} k_y \frac{c}{eB} \left| \frac{d \ln T_i}{dx} \right| \right)^{1/3}. \quad (8.46)$$

Более подробный анализ для плазмы, в которой присутствует как градиент ионной температуры, так и градиент концентрации того же знака, дает следующее условие раскачки ионно-температурной неустойчивости:

$$\eta_i = \frac{d \ln T_i}{d \ln n} > 2. \quad (8.47)$$

Аналогичная неустойчивость, вызванная градиентом электронной температуры, называется электронно-температурной. В отличие от ионно-температурной неустойчивости она является мелкомасштабной  $k_y \rho_{ci} \gg 1$  и высокочастотной:  $|\omega| \gg k_z (T_i + T_e)^{1/2} / m_e^{1/2}$ . В этой волне по Больцману распределены ионы, так как их ларморовский радиус превосходит поперечную длину волны:

$$\frac{n^1}{n_0} = -\frac{e\phi^1}{T_i^0}. \quad (8.48)$$

Для электронов же  $k_y \rho_{ce} \ll 1$  и их поперечное движение по-прежнему представляет собой дрейф в скрещенных полях. Линеаризованные уравнения непрерывности, баланса продольного момента и тепла для электронов совпадают с (8.43) с заменой индекса « $i$ » на « $e$ ». Инкремент неустойчивости получается аналогично случаю ионно-температурной неустойчивости и равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( k_z^2 \frac{T_i}{m_e} k_y \frac{c}{eB} \left| \frac{d \ln T_e}{dx} \right| \right)^{1/3}. \quad (8.49)$$

Так же как и в предыдущем случае, неустойчивость раскачивается при условии

$$\eta_e = \frac{d \ln T_e}{d \ln n} > 2. \quad (8.50)$$

### 8.5. ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФфуЗИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Развитие неустойчивостей дрейфовой природы приводит к переходу плазмы в турбулентное состояние и переносу частиц, энергии и момента поперек магнитного поля. Рассмотрим этот процесс на примере универсальной неустойчивости. Так как инкремент этой неустойчивости весьма мал по сравнению с вещественной частью частоты, которая близка к дрейфовой частоте, то можно воспользоваться квазилинейным приближением. При этом одновременно существует много волн, в первую очередь влияющих на среднюю функцию распределения, изменения которой приводят к насыщению неустойчивости раньше, чем станет существенным взаимодействие волн между собой.

Как и в линейном случае, анализ проведем на основе кинетического уравнения для электронов в дрейфовом приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{c[\vec{E} \cdot \vec{B}]}{B^2} \nabla_{\perp} f - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V_z} = St. \quad (8.51)$$

Функцию распределения представим в виде

$$f = f^0 + f^1;$$

$$f^1 = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}0} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \exp(-i\Omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}), \quad (8.52)$$

где амплитуды  $f_{\vec{k}}$  из-за малости инкремента являются медленно меняющимися по сравнению с  $|\omega_{\vec{k}}^{-1}|$  функциями времени. Функция  $f^0$  усреднена по времени на временах, больших  $|\omega_{\vec{k}}^{-1}|$ , и по пространству на расстояниях, много больших длин волн. Аналогично для потенциала

$$\phi^1 = \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}0} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} \exp(-i\Omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}). \quad (8.53)$$

Суммирование в (8.52) и (8.53) происходит по положительным и отрицательным значениям  $\vec{k}$ . Так как потенциал вещественен, то  $\phi_{-\vec{k}} = -\phi_{\vec{k}}^*$ . При линейризации будем пренебрегать нелинейностью в членах  $\frac{c[\vec{E} \cdot \vec{B}]}{B^2} \nabla_{\perp} f$  и  $\frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V_z}$ , то есть будем пренебрегать нелинейным взаимодействием различных мод в силу малости их амплитуд.

В линейном приближении, как следует из рассмотрения в разделе 8.3:

$$f_{\vec{k}} = \frac{\phi_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}} - k_z V_z + i\gamma_{\vec{k}} + i\nu} \left[ -\frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{ek_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right]. \quad (8.54)$$

Уравнение для медленно меняющейся функции расщепления  $f^0$  найдем из усредненного уравнения (8.51):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \left\langle \frac{c[\vec{E}^1 \cdot \vec{B}]}{B^2} \nabla_{\perp} f^1 \right\rangle - \left\langle \frac{eE_z^1}{m_e} \frac{\partial f^1}{\partial V_z} \right\rangle = \langle St \rangle. \quad (8.55)$$

При усреднении в уравнении (8.55) двойных сумм типа

$$\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} A_{\vec{k}} B_{\vec{k}'} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\Omega_{\vec{k}} t + \gamma_{\vec{k}} t) \exp(i\vec{k}'\vec{r} - i\Omega_{\vec{k}'} t + \gamma_{\vec{k}'} t),$$

учтем, что сохраняются только произведения с  $\vec{k}' = -\vec{k}$ . При этом согласно (8.41)  $\Omega_{-\vec{k}} = -\Omega_{\vec{k}}$  и  $\gamma_{-\vec{k}} = \gamma_{\vec{k}}$ . Имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \sum_{\vec{k}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k_z \omega_{ce}}{k_y} \frac{\partial}{\partial V_z} \right) \frac{c^2 k_y^2 |\phi_{\vec{k}}^2|}{B^2} \times$$

$$\times \pi \delta(\Omega_{\vec{k}} - k_z V_z) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k_z \omega_{ce}}{k_y} \frac{\partial}{\partial V_z} \right) f_0 = \langle St \rangle. \quad (8.56)$$

Уравнение (8.56) описывает эволюцию усредненной функции распределения.

Возмущения потенциала при этом растут с нелинейным инкрементом  $\gamma_{\vec{k}}$ , который зависит от функции распределения  $f_0$ . Нелинейный инкремент отличается от линейного выражения (8.41), вычисленного для максвелловской функции распределения. Оставляя в формулах раздела 8.3 функцию распределения электронов произвольной, получим

$$\gamma_{\vec{k}}(t) = \frac{\Omega_{\vec{k}} \pi T_e}{en_0} \int \left[ -\frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{ek_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right] \delta(\Omega_{\vec{k}} - k_z V_z) dV_z d\vec{V}_{\perp}. \quad (8.57)$$

Вид усредненной функции распределения электронов  $f_0$  определяется балансом между диффузией в пространстве скоростей для резонансных частиц и столкновительным членом. Диффузия по скоростям стремится сгладить функцию распределения (эффект формирования плато), а столкновения стремятся максвеллизировать функцию распределения. Решение (8.56) позволяет найти  $f_0$  и, следовательно, нелинейный инкремент  $\gamma_{\vec{k}}$ . Интегрируя (8.56) по скоростям с учетом (8.57), получаем уравнение диффузии:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0, \quad (8.58)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \sum_{\vec{k}} \frac{c^2 k_y^2 |\phi_{\vec{k}}^2| \gamma_{\vec{k}}}{B^2 \Omega_{\vec{k}}^2}. \quad (8.59)$$

Для ионов вклад в диффузию дают нерезонансные частицы. Наиболее просто выражение для диффузионного потока ионов получается усреднением электрических дрейфов в направлении градиента концентрации:

$$\Gamma_x = \left\langle n \frac{cE_y}{B} \right\rangle = -D \frac{\partial n_0}{\partial x}. \quad (8.60)$$

При таком усреднении вклад в поток дают возмущения концентрации, сдвинутые по фазе на величину  $\pi/2$  относительно возмущений потенциала. Используя вычисления раздела (8.3) с произвольной (немаксвелловской)

функцией распределения, получаем, что коэффициент диффузии в выражении (8.60) совпадает с коэффициентом диффузии в (8.59).

Для других типов неустойчивостей, с большим инкрементом, квазилинейное приближение неприменимо, так как становится существенным нелинейное взаимодействие между модами, которое определяет спектр колебаний. Тем не менее используем квазилинейное выражение для грубой верхней оценки коэффициентов переноса. Предположим, что мода с наибольшей длиной волны дает основной вклад в перенос, и оставим одно главное слагаемое в сумме (8.59). Амплитуду колебаний основной моды оценим как  $k_y n_{\bar{k}} \sim dn_0/dx$ . В этом случае, когда собственный градиент концентрации в волне становится порядка среднего градиента концентрации, на градиенте концентрации волны раскачиваются более мелкомасштабные колебания, отбирая энергию у основной моды, при этом основная мода насыщается. Подставляя эту оценку в (8.59), оставляя в сумме одно слагаемое и учитывая, что  $n_{\bar{k}}/n_0 \approx e\phi_{\bar{k}}/T_e$  и  $\Omega_{\bar{k}} \sim \omega_d$ , получаем оценку коэффициента диффузии:

$$D \sim k_y^{-2} \gamma_{\bar{k}}. \quad (8.61)$$

Эту же оценку можно получить, считая, что инкремент основной моды  $\gamma_{\bar{k}}$  компенсируется диффузионным затуханием  $Dk_y^2$ , являющимся результатом развития всего спектра колебаний.

Наибольший из возможных коэффициентов диффузии для моды дрейфового типа получается для длины волны порядка характерного размера плазмы  $k_y L \sim 1$ , где  $L = |d \ln n_0 / dx|^{-1}$ , и инкремента порядка вещественной части частоты. В этом случае, полагая  $\gamma_{\bar{k}} \sim \Omega_{\bar{k}} \sim \omega_d$ , имеем

$$D \sim D^B = \frac{cT_e}{eB}. \quad (8.62)$$

Этот коэффициент диффузии известен как бомовский коэффициент диффузии и является максимально возможным для дрейфовой турбулентности. Для расчета же реального диффузионного потока в общем случае необходим расчет спектра колебаний с учетом нелинейного взаимодействия между модами.

### 8.6. ВЛИЯНИЕ ШИРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Шир (перекрещенность) силовых линий магнитного поля, вообще говоря, подавляет развитие неустойчивостей. Проанализируем его влияние на примере неустойчивостей дрейфовой природы. Определим вначале шир в плоской геометрии. Рассмотрим магнитное поле вида

$$\vec{B} = B_z(x)\vec{e}_z + B_y(x)\vec{e}_y. \quad (8.63)$$

Такое магнитное поле создается током

$$\vec{j} = j_y(x)\vec{e}_y + j_z(x)\vec{e}_x,$$

который связан с магнитным полем уравнениями Максвелла  $-\partial B_z/\partial x = 4\pi j_y/c$  и  $-\partial B_y/\partial x = 4\pi j_z/c$ . Все возмущения  $\Psi$  в волне по-прежнему имеют вид

$$\Psi = A(x)\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z). \quad (8.64)$$

Так как магнитное поле поворачивается в пространстве, то, раскрывая скалярное произведение

$$\vec{k}\vec{B} = k_{\parallel}B = k_z B_z + k_y B_y,$$

получаем

$$k_{\parallel}(x) = \frac{k_z B_z + k_y B_y}{B}. \quad (8.65)$$

Пусть при некотором значении  $x_0$  продольная длина волны стремится к бесконечности  $k_{\parallel}(x_0) = 0$ . Это условие может достигаться, если величины  $k_z$  и  $k_y$  имеют разные знаки. Разложим величину  $k_{\parallel}$  в ряд вблизи этой точки, считая для простоты, что вдоль оси  $x$  изменяется только поле  $B_y$ , причем  $B_y \ll B_z$  и  $B_z/B \approx 1$ :

$$k_{\parallel}(x) = k_y \frac{d(B_y/B)}{dx} (x - x_0). \quad (8.66)$$

Введем характерный масштаб  $L$  изменения параметров плазмы вдоль оси  $x$  (например,  $L = |d \ln n_0 / dx|^{-1}$ ) и определим шир магнитного поля согласно

$$\tilde{\Theta} = L \frac{d(B_y/B)}{dx}. \quad (8.67)$$

Тогда

$$k_{\parallel}(x) = k_y \tilde{\Theta}(x_0) \frac{x - x_0}{L}. \quad (8.68)$$

Шир является характеристикой самого магнитного поля. В то же время от него зависит длина волны возмущения вдоль магнитного поля.

В цилиндрической геометрии шир можно ввести аналогичным образом. Пусть возмущения имеют вид

$$\Psi = A(r) \exp(-i\omega t + im\theta + ik_z z), \quad (8.69)$$

$\vec{B} = B_z \vec{e}_z + B_{\theta}(r) \vec{e}_{\theta}$  и от радиуса зависит азимутальный компонент магнитного поля  $B_{\theta}$ . Азимутальному волновому числу соответствует  $k_{\theta} = m/r$ . Соответственно

$$k_{\parallel}(r) = \frac{k_z B_z + (m/r) B_{\theta}}{B}. \quad (8.70)$$

Вблизи резонансной магнитной поверхности радиуса  $r_0$ , где  $k_{\parallel}(r_0) = 0$ , параллельный волновой вектор

$$k_{\parallel}(r) = k_{\theta} \tilde{\Theta}(r_0) \frac{r - r_0}{r_0}, \quad (8.71)$$

где шир определен согласно

$$\tilde{\Theta} = r^2 \frac{d(B_{\theta}/rB)}{dr}. \quad (8.72)$$

В общем случае, когда оба компонента магнитного поля зависят от пространственной координаты, имеем

$$\begin{aligned} k_{\parallel}(x) &= k_{\perp}(x_0) \tilde{\Theta}(x_0) \frac{x - x_0}{L}; \\ k_{\perp} &= k_y B_z / B - k_z B_y / B; \\ \tilde{\Theta} &= L \frac{B_z^2}{B^2} \frac{d(B_y / B_z)}{dx} \end{aligned} \quad (8.73)$$

— для плоской геометрии и

$$\begin{aligned} k_{\parallel}(x) &= k_{\perp}(r_0) \tilde{\Theta}(r_0) \frac{r - r_0}{r_0}; \\ k_{\perp} &= \frac{m}{r} B_z / B - k_z B_{\theta} / B; \\ \tilde{\Theta} &= r^2 \frac{B_z^2}{B^2} \frac{d(B_{\theta}/rB_z)}{dr} \end{aligned} \quad (8.74)$$

— для цилиндрической геометрии.

Шир магнитного поля приводит к стабилизации возмущений. Действительно, при смещении от магнитной поверхности параллельное волновое число начинает резко возрастать, а длина волны вдоль  $\vec{B}$  — уменьшаться. На некотором расстоянии  $\delta$  от резонансной магнитной поверхности параллельное волновое число достигает значения  $k_{\parallel}^{\max}$ , при котором волна перестает нарастать. Для универсальной или дрейфовой-температурной неустойчивости максимальное значение  $k_{\parallel}^{\max}$  соответствует неравенству (8.10):

$$k_{\parallel}^{\max} = \omega_d / \sqrt{\frac{T_e + T_i}{m_i}}. \quad (8.75)$$

При больших значениях продольного волнового вектора поперечное движение ионов в дрейфовой волне сменяется их продольным движением и дрейфовая волна перестает существовать. Согласно (8.68)

$$\delta = \frac{k_{\parallel}^{\max} L}{k_y \tilde{\Theta}}. \quad (8.76)$$

Величина  $\delta$  называется «областью локализации неустойчивости вблизи резонансной поверхности». Вне этой области волна не нарастает, а затухает. Подставляя значение  $k_{\parallel}^{\max}$  (8.75) и выражение для дрейфовой частоты (8.8), полагая  $T_e \sim T_i$ , получаем

$$\delta \sim \frac{\rho_{ci}}{\tilde{\Theta}}. \quad (8.77)$$

Эта оценка справедлива для достаточно большого шира, когда  $\delta \ll L$ , то есть для  $\tilde{\Theta} > \rho_{ci} / L$ .

В поле с сильным широм появляется новый характерный масштаб  $\delta$  вместо  $L$  в направлении исходной неоднородности  $x$ . В результате локальное приближение, рассмотренное в предыдущих разделах, когда амплитуда волны предполагается плавной функцией  $x$ , справедливо только для коротких волн  $k_y \delta > 1$ . Максимальная длина волны вдоль  $y$  определяется условием

$$k_y^{\min} \delta = 1. \quad (8.78)$$

Более длинные волны в магнитном поле с сильным широм не раскачиваются.

Ограничение на длину волны приводит и к уменьшению турбулентных коэффициентов переноса. Используем (8.61) для оценки коэффициента ионной температуропроводности, связанного с ионно-температурной дрейфовой неустойчивостью. Подставляя  $k_y^{\min}$  (8.78) и  $\delta$  (8.77), полагая инкремент порядка дрейфовой частоты, получаем

$$\chi_i \sim \frac{cT_e \rho_{ci}}{eB \bar{\Theta} L}. \quad (8.79)$$

Коэффициент ионной температуропроводности оказывается в  $\delta/L$  раз меньше боровского коэффициента. В отличие от боровского, он обратно пропорционален квадрату магнитного поля и зависит от характерного масштаба изменения параметров плазмы  $L$ . Такой тип зависимости известен как гироборовский. Отметим также, что для ионно-температурной дрейфовой неустойчивости коэффициент диффузии значительно меньше коэффициента ионной температуропроводности из-за больцмановского распределения электронов в электрическом поле волны.

Для электронно-температурной дрейфовой неустойчивости максимальное значение параллельного волнового вектора определяется условием

$$k_{\parallel}^{\max} = \omega_d / \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}. \quad (8.80)$$

Поэтому для нее область локализации значительно меньше:

$$\delta \sim \frac{\rho_{ce}}{\bar{\Theta}}. \quad (8.81)$$

Соответственно, оценка для коэффициента электронной температуропроводности есть

$$\chi_e \sim \frac{cT_e \rho_{ce}}{eB \bar{\Theta} L}. \quad (8.82)$$

При наличии сильного шира магнитного поля локальный анализ неустойчивостей, рассмотренный ранее в этой главе, перестает быть применимым. Действительно, характерный масштаб изменения амплитуды волны в направлении  $x$  перестает быть большим по сравнению с длиной

волны в направлении  $y$ , поэтому электрические поля и поляризационные токи ионов вдоль  $x$  и вдоль  $y$  становятся одного порядка. Дивергенция продольного потока ионов меняется от малого при  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  значения до значений, приводящих к затуханию волны при  $x \sim \delta$ . При строгом рассмотрении возмущения по-прежнему ищутся в виде (8.1), но уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно  $x$ .

Покажем, как такой подход реализуется для дрейфовой волны в бесстолкновительной плазме в отсутствие градиента температуры, соответствующей универсальной неустойчивости в поле без шира. В уравнении непрерывности для ионов в отличие от (8.23) учтем поляризационный поток вдоль  $x$  и продольную скорость ионов:

$$-i\omega n^1 + in_0 k_{\parallel}(x) u_{\parallel}^1 - \frac{ik_y c \phi^1}{B} \frac{dn_0}{dx} - i\omega k_y^2 n_0 \frac{c^2 m_i}{e B^2} \phi^1 + i\omega n_0 \frac{c^2 m_i}{e B^2} \frac{d^2 \phi^1}{dx^2} = 0. \quad (8.83)$$

Мы учли, что характерный масштаб изменения амплитуды волны мал по сравнению с  $L$ . Здесь  $k_{\parallel}(x)$  линейно меняется вблизи резонансной поверхности в соответствии с (8.68). Продольную скорость ионов найдем из уравнения продольного баланса сил ( $T_e \gg T_i$ ):

$$-i\omega n_0 m_i u_{\parallel}^1 = -ik_{\parallel}(x) T_e n^1. \quad (8.84)$$

Еще одна связь возмущений концентрации и потенциала находится из электронного уравнения (8.40). Пренебрежем вначале мнимой частью в (8.40), которая связана с затуханием Ландау. Тогда  $n^1 = (e\phi^1/T_e)n_0$  соответствует бoльцмановскому распределению для электронов. Комбинируя (8.84) и (8.83), получаем

$$\rho_{ci}^2 \frac{d^2 \phi^1}{dx^2} + \left[ \frac{k_y^2 T_e \tilde{\Theta}^2 (x - x_0)^2}{m_i \omega^2 L^2} - \left( 1 + k_y^2 \rho_{ci}^2 - \frac{\omega_d}{\omega} \right) \right] \phi^1 = 0, \quad (8.85)$$

где ларморовский радиус определен согласно

$$\rho_{ci} = (T_e/m_i)^{1/2} (m_i c/eB).$$

Заменой переменных

$$\xi = \frac{x - x_0}{\rho_{ci}} \left( \frac{\omega_d \tilde{\Theta}}{\omega} \right)^{1/2} \exp(i\pi/4) \quad (8.86)$$

уравнение (8.85) сводится к уравнению квантомеханического осциллятора:

$$\frac{d^2 \phi^1}{dx^2} + (2E - \xi^2) \phi^1 = 0, \quad (8.87)$$

где энергия осциллятора:

$$E = \frac{i}{2} \frac{\omega}{\omega_d \tilde{\Theta}} \left( 1 + k_y^2 \rho_{ci}^2 \right) - \frac{\omega_d}{\omega}. \quad (8.88)$$

Собственные значения энергии, как известно,

$$E = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.89)$$

Из (8.88) и (8.89) находим уравнение для частоты, корни которого для не слишком больших значений  $n$  есть

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega = \Omega = \omega_d / (1 + k_y^2 \rho_{ci}^2); \\ \operatorname{Im} \omega = \gamma = -\omega_d \tilde{\Theta} (2n + 1). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Собственные функции выражаются через полиномы Эрмита  $H_n$ :

$$\phi^1 = H_n(\xi) \exp(-\xi^2/2). \quad (8.91)$$

Собственные функции согласно (8.90) слабо затухают. При  $x \rightarrow \infty$  собственные функции осциллируют

$$\phi^1(x \rightarrow \infty) = \exp(-i \frac{\omega_d \Theta}{\omega} \frac{x^2}{2\rho_{ci}^2}) \quad (8.92)$$

с характерным масштабом  $\rho_{ci} / \tilde{\Theta}^{1/2}$ . Так как имеется мнимая поправка к частоте, то собственные функции расходятся. Чтобы устранить расходимость, необходимо учесть дополнительный член в электронном уравнении, приводящий к раскату универсальной неустойчивости. Такой анализ приводит к дифференциальному уравнению, которое можно исследовать лишь численно. При этом оказывается, что дрейфовые волны в поле с сильным широм затухают. Аналогичным образом исследуются и дрейфово-температурные волны. Они остаются нарастающими при условии  $k_y \delta > 1$ .

# Глава 9. ДИНАМИКА ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 9.1. ИОННЫЙ ЗВУК

**В** гидродинамическом приближении полностью ионизованная плазма в отсутствие примесей описывается системой уравнений переноса, рассмотренной в главе 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \bar{u}_\alpha &= 0, \\ m_\alpha n \frac{d\bar{u}_\alpha}{dt} &= -\nabla p_\alpha - \nabla \cdot \bar{\pi}_\alpha + Z_\alpha e n \bar{E} + \bar{R}_\alpha, \\ \frac{3}{2} n \frac{dT_\alpha}{dt} + n_\alpha T_\alpha \nabla \cdot \bar{u}_\alpha + \pi_{\alpha jk} \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} + \nabla \cdot \bar{q}_\alpha &= Q_\alpha. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Складывая два уравнения баланса сил для электронов и ионов и пренебрегая электронной инерцией и ионной вязкостью, получаем уравнение суммарного баланса сил, в котором отсутствуют электрическое поле и сила трения:

$$n m_i \frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\nabla p. \quad (9.2)$$

Здесь суммарное давление  $p = p_e + p_i$ . Пренебрежение ионной вязкостью по сравнению с градиентом давления оправданно, если длина свободного пробега мала по сравнению с характерным размером неоднородности  $L$ , что является условием применимости гидродинамического описания плазмы.

Как отмечалось в главе 7, уравнение (9.2) позволяет оценить характерную скорость, которая возникает в неоднородной полностью ионизованной плазме. Эта ско-

рость порядка  $u_i \sim [(T_e + T)_i/m_i]^{1/2}$  и зависит от конкретной задачи. Рассмотрим вначале эволюцию малых возмущений концентрации в безграничной однородной плазме концентрации  $n_0$  в изотермическом случае. Пусть все величины зависят только от координаты  $z$ . Будем искать концентрацию и ионную гидродинамическую скорость в виде

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n^1, \quad u_i = u_i^1, \\ n^1 &\sim \exp(-i\omega t + ikz), \quad u_i^1 \sim \exp(-i\omega t + ikz). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Линеаризуя уравнение непрерывности для ионов и уравнение суммарного баланса сил (9.2), получаем

$$\begin{aligned} -i\omega n^1 + ik u_i^1 n_0 &= 0, \\ -i\omega m_i n_0 u_i^1 + ik(T_e + T_i)n^1 &= 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Условие совместности системы (9.4) приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega = \pm kc_s, \quad (9.5)$$

где для изотермической плазмы

$$c_s = \sqrt{\frac{T_e + T_i}{m_i}}. \quad (9.6)$$

Величина  $c_s$  называется скоростью ионного звука. Более общее определение скорости ионного звука:

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (9.7)$$

где  $\rho = nm_i$ . Это выражение при  $T_{e,i} = \text{const}$  совпадает с (9.6). Таким образом, возмущение концентрации распространяется согласно (9.5) с постоянной фазовой скоростью, совпадающей со скоростью звука, а знак « $\pm$ » соответствует распространению в одну или другую сторону. При этом дисперсия, т. е. зависимость фазовой скорости от длины волны, отсутствует.

Как следует из совместного рассмотрения электронного и ионного уравнений непрерывности, в отсутствие тока через плазму  $u_e = u_i = u$ , т. е. электроны и ионы движутся совместно. Сила трения между ними равна нулю, а из

уравнения баланса сил для электронов имеем больцмановское распределение для электронов:

$$\phi^1 = \frac{T_e}{e} \ln(n/n_0) \approx \frac{T_e}{e} \frac{n^1}{n_0}. \quad (9.8)$$

Положительные возмущения концентрации заряжены положительно, а отрицательные — отрицательно. Электрическое поле, соответствующее больцмановскому потенциалу, удерживает электроны от разбегания и обеспечивает одинаковую скорость электронов и ионов в ионно-звуковой волне.

Если характерное время, типичное для ионно-звуковой волны  $\omega^{-1} = (kc_s)^{-1}$ , мало по сравнению с диссипативными временами — временем электронной и ионной теплопроводности  $(k^2 \chi_{e,i})^{-1}$  и временем теплообмена  $(2m_e \nu_{ei}/m_i)^{-1}$ , то ионный звук является адиабатическим. В этом случае сохраняется энтропия единицы объема  $s$ , температуры электронов и ионов меняются как  $T_{e,i} \sim n^{2/3}$ , а полное давление как  $p \sim n^{5/3}$ . Система (9.4) в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} -i\omega n^1 + iku_i^1 n_0 &= 0, \\ -i\omega_i m_i n_0 + ik \frac{dp}{dn} n^1 &= 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Закон дисперсии по-прежнему имеет вид (9.5), а скорость звука в адиабатическом случае

$$c_s = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{s=\text{const}}} = \sqrt{\frac{5(T_e + T_i)}{3m_i}}. \quad (9.10)$$

Наконец, возможна ситуация, когда время  $\omega^{-1}$  мало по сравнению со временем ионной теплопроводности и временем теплообмена, но велико по сравнению со временем электронной теплопроводности. Такая ситуация может возникнуть из-за весьма большой электронной теплопроводности. В этом случае ионный звук является адиабатическим по ионам и изотермическим по электронам, а скорость звука дается выражением

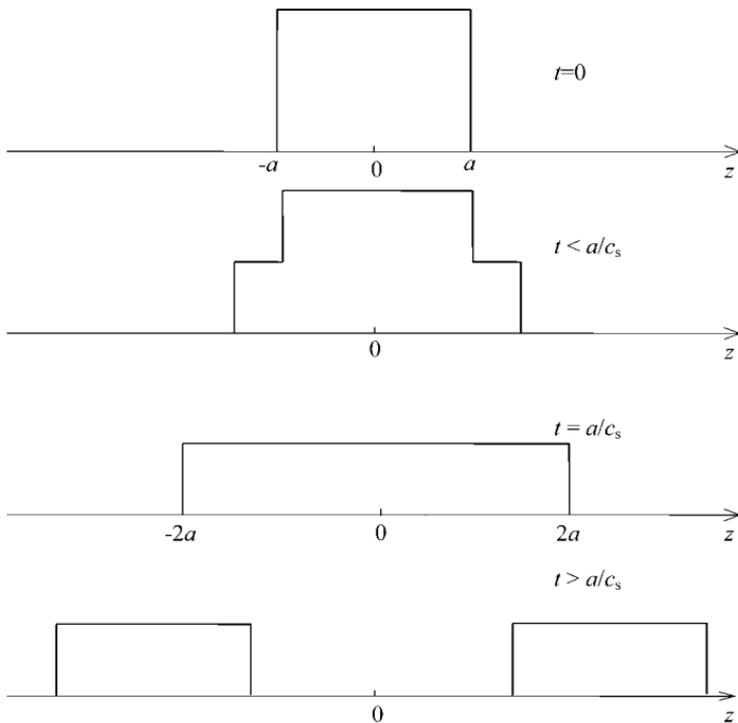
$$c_s = \sqrt{\frac{T_e + (5/3)T_i}{m_i}}. \quad (9.11)$$

Так как у ионного звука отсутствует дисперсия, то есть волны любой длины распространяются с одной и той же скоростью, то с той же скоростью распространяется и возмущение произвольной формы, которое можно разложить в интеграл Фурье на отдельные волны. Поэтому общее решение линеаризованных уравнений (9.1), (9.2) имеет вид

$$n^1 = f_1(z - c_s t) + f_2(z + c_s t). \quad (9.12)$$

Это можно продемонстрировать и непосредственно, записав исходные линеаризованные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u_i^1}{\partial z} &= 0, \\ n_0 \frac{\partial u_i^1}{\partial t} &= -c_s^2 \frac{\partial n^1}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9.13)$$



**Рис. 9.1**  
Распад прямоугольного возмущения  
на два движущихся возмущения половинной амплитуды

Продифференцировав первое уравнение по времени, а второе — по координате, и вычитая одно из другого, приходим к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 n^1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 n^1}{\partial t^2} = 0, \quad (9.14)$$

решением которого является (9.12).

В качестве примера рассмотрим эволюцию прямоугольного возмущения концентрации, имеющего вид  $n^1 = A$  при  $-a \leq z \leq a$  и  $n^1 = 0$  вне этого промежутка (см. рис. 9.1). Начальная скорость возмущения концентрации предполагается равной нулю. Такое возмущение можно представить в виде суммы двух возмущений половинной амплитуды, причем, в соответствии с (9.12), возмущения движутся со скоростями  $\pm c_s$ . С течением времени возмущение распадается на два движущихся в разные стороны сигнала (рис. 9.1).

Ионный звук может распространяться и в бесстолкновительной плазме, если электронная температура значительно превосходит ионную  $T_e \gg T_i$ . В этом случае можно рассуждать следующим образом: согласно уравнению баланса сил для электронов электрическое поле уравновешивает градиент электронного давления. Поэтому в уравнении баланса сил для ионов электрическая сила доминирует, а давлением ионов и их вязкостью можно пренебречь. В результате, заменяя в уравнении баланса сил для ионов электрическую силу на градиент электронного давления, приходим к уравнению (9.2), в котором присутствует только электронное давление:

$$nm_i \frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\nabla p_e. \quad (9.15)$$

Скорость звука же совпадает с (9.6). При сравнимых температурах ионный звук сильно затухает по механизму Ландау, здесь необходим кинетический подход.

Особого рассмотрения требует случай, когда длина волны возмущения порядка дебаевского радиуса. При этом отсутствует квазинейтральность и необходимо использовать уравнение Пуассона. Проанализируем эту ситуацию для бесстолкновительной плазмы при  $T_e \gg T_i$ . Исходная система уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \bar{u}_i) &= 0, \\
\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \bar{u}_e) &= 0, \\
m_i n_i \frac{d\bar{u}_i}{dt} &= en_i \bar{E}, \\
0 &= -T_e \nabla n_e - en_e \bar{E}, \\
\nabla \cdot \bar{E} &= 4\pi e(n_i - n_e).
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Из электронного уравнения баланса сил следует больцмановское распределение электронов  $\phi = (T_e/e) \ln(n_e/n_0)$ , где  $n_0$  — невозмущенная концентрация как электронов, так и ионов. Из ионного уравнения баланса сил имеем  $m_i n_i \frac{d\bar{u}_i}{dt} = -T_e \nabla n_e$ . Линеаризованная система уравнений неразрывности ионов, уравнений баланса сил и уравнения Пуассона в одномерном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
-i\omega n_i^1 + ikn_0 u_i^1 &= 0, \\
e\phi^1 / T_e &= n_e^1 / n_0, \\
-i\omega m_i n_0 u_i^1 &= -ikT_e n_e^1, \\
k^2 \phi^1 &= 4\pi e(n_i^1 - n_e^1).
\end{aligned} \tag{9.17}$$

Исключая потенциал и скорость ионов, приходим к системе уравнений с двумя неизвестными относительно  $n_e^1$ ,  $n_i^1$ . Приравнявая к нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 r_d^2}, \tag{9.18}$$

где  $r_d^2 = T_e / (4\pi n_0 e^2)$ . Видно, что в общем случае звуковые волны обладают дисперсией — фазовая скорость зависит от длины волны. При больших длинах волн закон дисперсии (9.18) переходит в (9.5), а при малых длинах волн  $kr_d \ll 1$  частота не зависит от длины волны и совпадает с ионной плазменной частотой:

$$\omega = \omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}}. \tag{9.19}$$

## 9.2. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Проанализируем нелинейную эволюцию в полностью ионизованной плазме в ситуации, когда начальные размеры неоднородности несут существенны. В этом случае решения различных задач удается получить с помощью автомодельного подхода, когда концентрация и гидродинамическая скорость ионов ищутся как функции одной автомодельной переменной. Рассмотрим в качестве примера одномерное расширение плазмы в вакуум (фоновую плазму малой плотности). Пусть при  $z = 0$  расположен источник частиц  $I = \dot{N}\delta(z)$ . При этом плазма растекается в обе стороны от источника в положительном и отрицательном направлениях  $z$ . Вблизи источника частиц устанавливается стационарный профиль концентрации, при этом поток плазмы находится интегрированием уравнения непрерывности по области вблизи источника:

$$2\Gamma(z=0) = \int I dz = \dot{N}.$$

Рассмотрим сначала изотермический случай  $T_e = \text{const}$ ,  $T_e \gg T_i$ . Такая ситуация может реализоваться при расширении в плазму малой плотности за счет очень большой теплопроводности электронов, поток тепла которых компенсирует работу, затрачиваемую на расширение плазмы. В уравнениях (индекс у гидродинамической скорости ионов опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial z} &= 0; \\ nm_i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.20)$$

перейдем к переменной  $\zeta = z/t$ . Концентрация и скорость ионов предполагаются функциями только от  $\zeta$ :  $n = n(\zeta)$ ,  $u = u(\zeta)$ . Производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{d}{d\zeta} = -\frac{1}{t} \zeta \frac{d}{d\zeta}; \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\zeta}. \end{aligned}$$

В новых переменных система уравнений (9.20) имеет вид

$$\begin{aligned} -\zeta \frac{dn}{d\zeta} + \frac{d(nu)}{d\zeta} &= 0; \\ n(-\zeta \frac{du}{d\zeta} + u \frac{du}{d\zeta}) &= -c_s^2 \frac{dn}{d\zeta}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Здесь использовано определение скорости звука (9.7). Выражая из первого уравнения производную  $du/d\zeta$  и подставляя во второе уравнение, получаем (знак выбран для течения вдоль положительного направления оси  $z$ )

$$u = c_s + \zeta. \quad (9.22)$$

В изотермическом случае скорость звука постоянна, поэтому  $du/d\zeta = 1$ , и для концентрации имеем

$$\frac{dn}{d\zeta} + \frac{n}{c_s} = 0, \quad (9.23)$$

откуда

$$n = A \exp\left(-\frac{\zeta}{c_s}\right). \quad (9.24)$$

В исходных переменных с учетом условия  $nu(z=0) = \Gamma(z=0) = n/2$  получаем

$$n = \frac{\Gamma(z=0)}{c_s} \exp\left(-\frac{z}{c_s t}\right), \quad u = c_s + \frac{z}{t}. \quad (9.25)$$

Таким образом, концентрация экспоненциально спадает с масштабом  $c_s t$ , а скорость ионов линейно растет с расстоянием.

В адиабатическом случае скорость звука (9.7) зависит от концентрации как  $n^{1/3}$  ( $p \sim n^{5/3}$ ). Соотношение (9.22) для гидродинамической скорости по-прежнему справедливо. Из второго уравнения (9.21) находим общую связь между  $u$  и  $n$ :

$$u = - \int c_s \frac{dn}{n}. \quad (9.26)$$

Выполняя интегрирование и используя (9.22), получаем

$$\begin{aligned} n &= n_0 \left[ 1 - \frac{z}{4c_s(n_0)t} \right]^3, \\ u &= c_s(n_0) + \frac{3z}{4t}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Здесь  $n_0 c_s(n_0) = \Gamma(z = 0)$ . В адиабатическом случае концентрация обращается в ноль на конечном расстоянии, а скорость остается ограниченной.

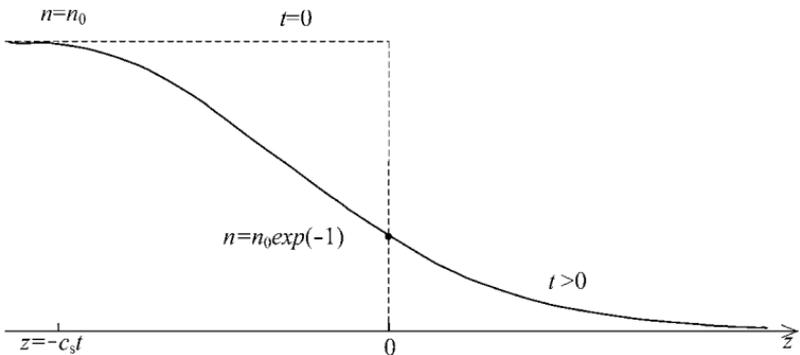
Используя полученные решения, можно, например, проанализировать задачу о распаде произвольного начального разрыва. Пусть в начальный момент времени имелся разрыв концентрации

$$\begin{aligned} n(z \leq 0) &= n_0, \\ n(z > 0) &= 0. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Ограничимся изотермическим случаем. Тогда решение конструируется на основе соотношений (9.22)–(9.24). Решение, соответствующее начальному условию (9.28), имеет вид

$$\begin{aligned} n &= n_0 \exp\left(-\frac{z}{c_s t} - 1\right), & u &= c_s + \frac{z}{t}, & z &> -c_s t; \\ n &= n_0, & u &= 0, & z &\leq -c_s t. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Профиль концентрации приведен на рис. 9.2. Плазма из области  $-c_s t < z < 0$  с течением времени вытекает направо, а влево со скоростью звука распространяется волна разряжения. В то же время концентрация при  $z = 0$  остается постоянной и равной  $n(z = 0) = n_0 \exp(-1)$ . Аналогично строится решение и в адиабатическом случае.



**Рис. 9.2**

Распад начального разрыва (пунктир). С течением времени плазма (сплошная кривая) вытекает направо, а слева возникает волна разряжения

### 9.3. ПРОСТЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. ОПРОКИДЫВАНИЕ

Одномерные бегущие волны, которые являются аналогами линейных ионно-звуковых волн, эволюционируют более сложным образом. Будем искать частное решение системы уравнений (9.20) в виде бегущей волны. В этом случае все физические величины в волне (концентрация, давление, гидродинамическая скорость) являются функциями от  $(z - Vt)$ , причем скорость распространения  $V$ , в отличие от линейного случая, зависит от амплитуды. Так как концентрация, давление и гидродинамическая скорость распространяются совместно, то одни величины являются функцией других. Используя этот факт, перепишем уравнение непрерывности в виде  $(\rho = m_i n)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho u)}{dp} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (9.30)$$

Здесь произведение  $\rho u$  считается функцией  $\rho$ . В уравнении же баланса сил

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (9.31)$$

выразим давление как функцию  $u$ :  $\partial p / \partial z = (dp/du) \partial u / \partial z$ . Уравнение для скорости при этом преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{du}\right) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (9.32)$$

Величины  $V(\rho) = \frac{d(\rho u)}{d\rho}$  в (9.30) и  $V(u) = \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{du}\right)$  в (9.32) представляют собой скорости распространения плотности и гидродинамической скорости соответственно. Так как эти величины распространяются совместно, то должно быть  $V(\rho) = V(u)$ , откуда

$$\frac{d(\rho u)}{d\rho} = \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{du}\right). \quad (9.33)$$

Учитывая, что  $dp/du = c_s^2 d\rho/du$ , где скорость звука определена согласно (9.7), из (9.33) имеем

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{c_s}{\rho}, \quad (9.34)$$

или

$$u = \pm \int \frac{c_s}{\rho} d\rho. \quad (9.35)$$

Выражение (9.35) дает зависимость  $u(\rho)$ , так как скорость звука является известной функцией плотности, см. раздел 9.1. Скорость же распространения

$$V(\rho) = V(u) = u \pm c_s.$$

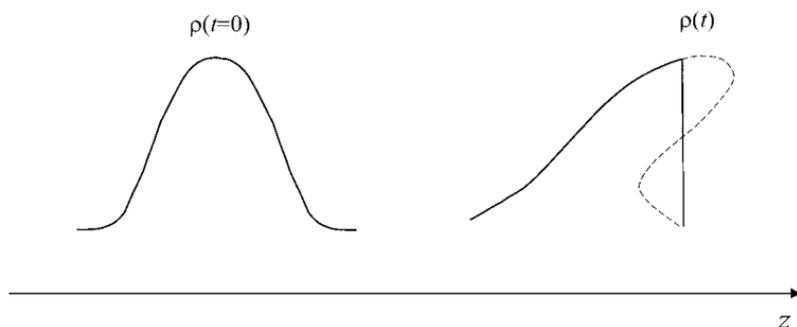
Мы видим, что скорость перемещения точек профиля плотности не является постоянной, как в линейном случае, а зависит от величины плотности. Профиль плотности, согласно (9.30), описывается выражением

$$\rho = \rho(z - V(\rho))t. \quad (9.36)$$

Другими словами, каждая точка исходного профиля перемещается с постоянной скоростью, но величина скорости перемещения зависит от значения плотности. В случае, например, изотермической плазмы, когда  $c_s = \text{const}$ :

$$V(\rho) = c_s \ln \frac{\rho}{\rho_0} \pm c_s, \quad (9.37)$$

где  $\rho_0$  — нормировочная константа, например значение плотности на бесконечности. Видно, что точки профиля, соответствующие большей плотности, распространяются быстрее, как это показано на рис. 9.3. С течением времени профиль плотности становится многозначным, т. е. происходит опрокидывание. Нефизический многозначный профиль возникает из-за неучета диссипативных членов, в частности ионной вязкости, в исходных уравнениях. Тем не менее реальный профиль плотности может быть приближенно получен и в рамках уравнений, не содержащих вязкость, с помощью «правила площадей». Проведем вертикальную линию, как показано на рис. 9.3 — так, чтобы площади заштрихованных областей были одинаковыми. Тогда профиль плотности, показанный сплошной линией, будет являться решением, так как состоит из плавного участка, который соответствует исходным уравнениям, и разрыва. Полное число частиц под таким профилем сохраняется и равно исходному числу частиц. На переднем фронте профиля плотности образуется ударная



**Рис. 9.3**  
Эволюция простой нелинейной волны

волна, которая полностью аналогична ударной волне в обычной гидродинамике.

Как и в гидродинамике, чтобы исследовать структуру ударной волны, необходимо перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с волной, и учесть ионную вязкость. Профиль концентрации при этом находится из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а характерная ширина фронта оказывается порядка длины свободного пробега. Однако для больших длин свободного пробега возникает существенное отличие от обычной гидродинамики. Если длина пробега превышает дебаевский радиус, то структура фронта ударной волны определяется не диссипацией, а нарушением квазинейтральности. При этом возникают так называемые бесстолкновительные ударные волны, для анализа структуры которых необходимо решать кинетические уравнения совместно с уравнением Пуассона. Концентрация ионов на фронте такой ударной волны осциллирует.

#### 9.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИОННО-ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ С ДИСПЕРСИЕЙ

Нелинейные образования с характерными размерами порядка дебаевского радиуса имеют целый ряд особенностей по сравнению с квазинейтральными нелинейными волнами, рассмотренными в предыдущем разделе.

Эффекты дисперсии, которые в линейном приближении возникают в этом случае, могут при определенных условиях компенсировать нелинейные эффекты и останавливать опрокидывание волны. Рассмотрим эволюцию такого образования в бесстолкновительном случае в приближении холодных ионов. Исходными являются одномерные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial z} &= 0, \\ m_i n_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) &= -n_i e \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\ 0 &= -T_e \frac{\partial n_e}{\partial z} + n_e e \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= -4\pi e(n_i - n_e). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Будем искать решение в виде локализованного возмущения, распространяющегося с постоянной скоростью, так что все величины являются функцией от переменной  $(z - Vt)$ :  $\Psi = \Psi(\zeta) = \Psi(z - Vt)$ . В отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе, скорость распространения будем считать постоянной и не зависящей от величины возмущений.

Уравнение непрерывности для ионов преобразуется к виду

$$-V \frac{dn_i}{d\zeta} + \frac{d(n_i u_i)}{d\zeta} = 0. \quad (9.39)$$

Его интегрирование дает

$$n_i(u_i - V) = \text{const} = -n_0 V. \quad (9.40)$$

Здесь предполагаются выполненными следующие граничные условия:  $n_e(\infty) = n_i(\infty) = n_0$  и  $u_i(\infty) = 0$ . Уравнение баланса сил для ионов в новых переменных имеет вид

$$m_i \left( -V \frac{du_i}{d\zeta} + u_i \frac{du_i}{d\zeta} \right) + e \frac{d\phi}{d\zeta} = 0. \quad (9.41)$$

После интегрирования имеем

$$m_i \left( \frac{u_i^2}{2} - u_i V \right) + e\phi = 0. \quad (9.42)$$

Константа интегрирования выбрана с учетом граничного условия  $\phi(\infty) = 0$ . Из квадратного уравнения (9.42) находим

$$u_i = V \pm \sqrt{V^2 - 2e\phi/m_i}. \quad (9.43)$$

Выбирая знак «-» в решении и комбинируя (9.43) с (9.40), получаем концентрацию ионов как функцию потенциала:

$$n_i = \frac{n_0 V}{\sqrt{V^2 - 2e\phi/m_i}}. \quad (9.44)$$

Из уравнения баланса сил для электронов найдем связь концентрации электронов с профилем потенциала:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right). \quad (9.45)$$

Наконец, после подстановки (9.44) и (9.45) в уравнение Пуассона получаем

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = 4\pi en_0 \left[ \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) - \frac{V}{\sqrt{V^2 - 2e\phi/m_i}} \right]. \quad (9.46)$$

Это уравнение совпадает с (3.20), но мы ищем решение, удовлетворяющее другому граничному условию  $\phi(\infty) = 0$ . Введем безразмерные переменные:

$$\Phi = \frac{e\phi}{T_e}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{r_d}, \quad r_d = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_0 e^2}}.$$

В новых переменных уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\tilde{\zeta}^2} = \exp(\Phi) - \frac{1}{(1 - 2\Phi/M^2)^{1/2}}. \quad (9.47)$$

Здесь  $M = V/c_s$  — число Маха. Вводя потенциальную энергию, так что правая часть равна  $-dU/d\Phi$ , имеем

$$U(\Phi) = -\exp(\Phi) - M^2(1 - 2\Phi/M^2)^{1/2} + 1 + M^2. \quad (9.48)$$

Выбор константы интегрирования соответствует  $U(\infty) = 0$ . При малых значениях  $\Phi$  потенциальная энергия описывается параболой:

$$U(\Phi) = -\frac{\Phi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2M^2}. \quad (9.49)$$

Если  $M > 1$ , то при малых  $\Phi$  потенциальная энергия отрицательна и убывает (рис. 9.4). С ростом  $\Phi$  потенциальная энергия возрастает, проходит через ноль и становится положительной. Действительно, например, когда квадратный корень в (9.48) обращается в ноль:

$$U(M^2/2) = 1 + M^2 - \exp(M^2/2).$$

Если  $M < 1,6$ , то это значение положительно. Поэтому при  $M < 1,6$  потенциальная энергия имеет вид, приведенный на рис. 9.4. Здесь  $\Phi_{\max}$  соответствует корню  $U(\Phi_{\max}) = 0$ .

Будем искать решение (9.47), соответствующее нулевому уровню энергии  $E = 0$  при условии

$$1 < M < 1,6. \quad (9.50)$$

Используя механическую аналогию ( $\zeta$  соответствует времени, а  $\Phi$  — координате частицы), заметим, что решение имеет колебательный характер, причем в области

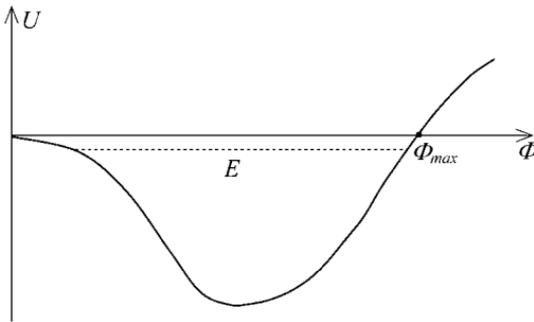


Рис. 9.4  
Профиль  
потенциальной  
энергии при  
 $1 < M < 1,6$

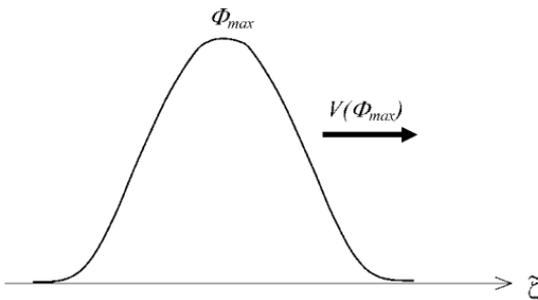


Рис. 9.5  
Ионно-звуковой  
солитон

$\Phi \rightarrow 0$  частица проводит бесконечное время. Профиль потенциала описывается уравнением, соответствующим закону сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 = -U, \quad (9.51)$$

и имеет вид, изображенный на рис. 9.5. Профиль потенциала дается интегралом

$$\tilde{\zeta} = \pm \int \frac{d\Phi}{\sqrt{-2(-\exp(\Phi) - M^2(1 - 2\Phi/M^2)^{1/2} + 1 + M^2)}}.$$

Решение представляет собой локализованное возмущение потенциала, движущееся с постоянной скоростью  $V$ . Такое образование называют солитоном. Все точки солитона движутся с одинаковой постоянной скоростью, а сам солитон сохраняет свою форму (9.51). Скорость движения солитона зависит от его амплитуды, эта связь находится из соотношения  $U(\Phi_{\max}) = 0$ , откуда

$$M(\Phi_{\max}) = \frac{[\exp(\Phi_{\max}) - 1]^2}{2[\exp(\Phi_{\max}) - 1 - \Phi_{\max}]}. \quad (9.52)$$

Характерный размер солитона имеет порядок дебаевского радиуса, так как  $\tilde{\zeta}$  измеряется в единицах дебаевского радиуса, амплитуда потенциала имеет порядок  $T_e/e$ , а скорость движения является сверхзвуковой. Таким образом, в отличие от простых нелинейных волн, существует решение в виде солитона, когда дисперсия компенсирует нелинейные эффекты. Солитоны существуют в диапазоне чисел Маха (9.50). Максимальная скорость распространения солитона соответствует  $M = 1,6$ , при этом соответствующая наибольшая предельная амплитуда солитона согласно (9.52) равна  $\Phi_{\max}^{\lim} = 1,3$ . При больших числах Маха и больших амплитудах солитонных решений не существует. При  $M = 1,6$  и  $\Phi_{\max}^{\lim} = 1,3$  квадратный корень в (9.48) обращается в ноль, а при еще больших значениях теряет смысл. Физически это означает, что при больших амплитудах дисперсионные эффекты не могут скомпенсировать нелинейность и нелинейные возмущения должны опрокидываться.

## Глава 10. МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

### 10.1. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

**В** магнитном поле система уравнений переноса для концентрации и гидродинамических скоростей в пренебрежении инерцией электронов имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \vec{u}_e &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \vec{u}_i &= 0, \\ 0 &= -\nabla p_e - en \vec{E} - \frac{ne}{c} [\vec{u}_e \cdot \vec{B}] + \vec{R}, \\ nm_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} &= -\nabla p_i + en \vec{E} + \frac{ne}{c} [\vec{u}_i \cdot \vec{B}] - \vec{R}.\end{aligned}\quad (10.1)$$

Предполагается, что связь давления и концентрации известна и дается, например, адиабатическим законом, который заменяет уравнения баланса энергии. Исходные уравнения иначе называются уравнениями двухжидкостной магнитной гидродинамики (МГД).

Преобразуем систему уравнений двухжидкостной МГД таким образом, чтобы в новой системе уравнений отсутствовали электрическое поле и токи по плазме. Вначале сложим два уравнения баланса сил, при этом электрическое поле и сила трения исчезают, поэтому с учетом выражения для плотности тока  $\vec{j} = en(\vec{u}_i - \vec{u}_e)$  имеем

$$nm_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\vec{j} \cdot \vec{B}]. \quad (10.2)$$

Это уравнение можно интерпретировать следующим образом. На плазму как целое действуют две силы: суммарный градиент давления и сила Лоренца. Они вызывают ускорение плазмы, которое практически совпадает с ускорением ионов, так как суммарный импульс почти совпадает с импульсом ионов из-за их большой массы. Воспользуемся уравнением Максвелла:

$$[\nabla \cdot \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

При медленных процессах, которые рассматриваются ниже, последним членом в правой части (током смещения) можно пренебречь. Действительно, с учетом того, что скорость дрейфа равна  $u = cE/B$ , отношение

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| / [\nabla \cdot \vec{B}] \sim \frac{EL}{Bct} \sim \frac{u^2}{c^2} \ll 1$$

мало. Поэтому уравнение Максвелла имеет вид

$$[\nabla \cdot \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (10.3)$$

Подставляя (10.3) в (10.2), получаем

$$nm_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [[\nabla \cdot \vec{B}] \cdot \vec{B}]. \quad (10.4)$$

Используем соотношение

$$[[\nabla \cdot \vec{B}] \cdot \vec{B}] = (\vec{B} \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2$$

и преобразуем уравнение суммарного баланса сил (10.4) к виду

$$nm_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\nabla p - \nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \nabla) \vec{B}. \quad (10.5)$$

Второй член в правой части известен как градиент «магнитного давления». Магнитное давление  $B^2/(8\pi)$  добавляется к газокинетическому давлению и вызывает ускорение плазмы в неоднородном магнитном поле. Последний же член в правой части связан с кривизной силовых линий магнитного поля, его называют «натяжением силовых линий». Подчеркнем, однако, что это лишь форма представления результата, физически же обе эти силы являются

проявлением силы Лоренца, вызванной токами по плазме, протекающими поперек магнитного поля.

Чтобы получить еще одно уравнение, выразим электрическое поле из уравнения баланса сил для электронов:

$$\vec{E} = -\frac{\nabla p_e}{en} - \frac{1}{c}[\vec{u}_e \cdot \vec{B}] + \frac{\vec{R}}{en}. \quad (10.6)$$

Вычислим ротор от обеих частей (10.6). С помощью уравнения Максвелла левая часть преобразуется к виду

$$[\nabla \cdot \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Теперь последовательно преобразуем слагаемые в правой части получившегося уравнения:

$$-\left[ \nabla \cdot \frac{\nabla p_e}{en} \right] = -\frac{1}{e} \nabla \cdot (T_e \nabla \ln n + \nabla T_e).$$

Используя формулу  $[\nabla \cdot (a\vec{b})] = a[\nabla \cdot \vec{b}] + [\nabla a \cdot \vec{b}]$ , найдем

$$-\left[ \nabla \cdot \frac{\nabla p_e}{en} \right] = \frac{1}{e} \left[ \frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla T_e \right]. \quad (10.7)$$

Второй член преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} [\nabla \cdot [\vec{u}_e \cdot \vec{B}]] &= -\frac{1}{c} [\nabla \cdot [\vec{u}_i \cdot \vec{B}]] + \frac{1}{ec} [\nabla \cdot [(\vec{j}/n) \cdot \vec{B}]] = \\ &= -\frac{1}{c} [\nabla \cdot [\vec{u}_i \cdot \vec{B}]] + \frac{1}{4\pi e} [\nabla \cdot [(\nabla \cdot \vec{B})/n \cdot \vec{B}]]. \end{aligned} \quad (10.8)$$

В третьем члене пренебрежем термосилой, которая влияет на медленные диффузионные движения. Описание последних следует проводить с помощью исходной системы уравнений двухжидкостной МГД (10.1). Оставшуюся часть силы трения, связанную с направленной скорости, перепишем в виде  $\vec{R} = \hat{\sigma}^{-1} n e \vec{j}$ , где  $\hat{\sigma}^{-1}$  — тензор, обратный тензору проводимости  $\hat{\sigma}$ , имеющему компоненты  $\sigma_{\parallel} = ne^2/(0,51m_e v_{ei})$  и  $\sigma_{\perp} = ne^2/(m_e v_{ei})$ . Имеем

$$[\nabla \cdot (\vec{R}/ne)] = [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} \vec{j})] = \frac{c}{4\pi} [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} [\nabla \cdot \vec{B}])]. \quad (10.9)$$

Таким образом, преобразованное уравнение (10.6) приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{en} [\nabla n \cdot \nabla T_e] + [\nabla \cdot [\vec{u}_i \cdot \vec{B}]] - \frac{c}{4\pi e} [\nabla \cdot [[\nabla \cdot \vec{B}]/n \cdot \vec{B}]] - \frac{c^2}{4\pi} [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} [\nabla \cdot \vec{B}])]. \quad (10.10)$$

Разделим теперь обе части суммарного уравнения баланса сил (10.4) на концентрацию и возьмем ротор. Преобразуем член, содержащий магнитное поле:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} [\nabla \cdot \left[ \frac{1}{n} [\nabla \cdot \vec{B}] \cdot \vec{B} \right]] &= m_i [\nabla \cdot \frac{d\vec{u}_i}{dt}] + [\nabla \cdot \frac{\nabla p}{n}] = \\ &= -[\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla (T_e + T_i)] + m_i \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{u}_i] + m_i [\nabla \cdot [[\nabla \cdot \vec{u}_i] \cdot \vec{u}_i]]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

При получении последнего слагаемого использовано соотношение  $[[\nabla \cdot \vec{u}_i] \cdot \vec{u}_i] = (\vec{u}_i \nabla) \vec{u}_i - \frac{1}{2} \nabla u_i^2$ .

Комбинируя (10.10) и (10.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{B} + \frac{m_i c}{e} [\nabla \cdot \vec{u}_i] \right) &= \nabla \cdot \left[ \vec{u}_i \cdot \left( \vec{B} + \frac{m_i c}{e} [\nabla \cdot \vec{u}_i] \right) \right] + \frac{c}{en} [\nabla n \cdot \nabla T_i] - \\ &- \frac{c^2}{4\pi} [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} [\nabla \cdot \vec{B}])]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

В сильном магнитном поле величиной  $\frac{m_i c}{e} [\nabla \cdot \vec{u}_i]$  можно пренебречь по сравнению с  $B$ , параметром является отношение  $\rho_{ci}(u_i)/L = cm_i u_i / (eBL) \ll 1$ , где  $L$  — характерный размер плазмы. Другими словами, ларморовский радиус ионов, вычисленный по направленной скорости, должен быть мал по сравнению с  $L$ . Поэтому уравнение (10.12) в сильном магнитном поле упрощается:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\nabla \cdot [\vec{u}_i \cdot \vec{B}]] + \frac{c}{en} [\nabla n \cdot \nabla T_i] - \frac{c^2}{4\pi} [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} \nabla \cdot \vec{B})]. \quad (10.13)$$

Второй член в правой части проявляется в случае, когда градиенты концентрации и ионной температуры не коллинеарны. Не будем анализировать такие ситуации и опустим соответствующий член.

Запишем в окончательном виде преобразованную систему уравнений (10.1), опуская уравнение непрерывности для электронов (индекс у ионной скорости опускаем), дополненную условием адиабатичности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= [\nabla \cdot [\bar{u} \cdot \bar{B}]] - \frac{c^2}{4\pi} [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} [\nabla \cdot \bar{B}])], \\
 nm_i \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\nabla p - \nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\bar{B} \nabla) \bar{B}, \\
 \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\bar{u}) &= 0, \\
 p &= p(n).
 \end{aligned}
 \tag{10.14}$$

Эта система уравнений называется «уравнениями одножидкостной МГД». При таком подходе плазма рассматривается как единая среда (жидкость), имеющая среднюю скорость  $\bar{u}$ , отождествляемую с ионной скоростью, плотность  $\rho = m_i n$ , давление  $p = n(T_e + T_i)$ , с которой связано магнитное поле, проявляющееся как магнитное давление, и сила, вызванная кривизной силовых линий магнитного поля. Уравнения одножидкостной МГД удобны для решения целого класса задач, часть из которых проанализирована ниже. В то же время следует иметь в виду, что в уравнениях одножидкостной МГД отсутствуют электрические поля и токи и поэтому часто физическая интерпретация решений затруднена и для анализа требуется возврат к системе уравнений двухжидкостной МГД.

Как нетрудно видеть из второго уравнения (10.14), в магнитном поле наряду со скоростью звука появляется еще одна характерная скорость  $c_A$ , которая называется альфвеновской:

$$c_A = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi n m_i}}. \tag{10.15}$$

Действительно, оценивая левую часть второго уравнения в (10.14) как  $n m_i u^2 / L$ , где  $L$  — характерный масштаб, а правую часть — как  $B^2 / (8\pi L)$ , получаем  $u \sim c_A$ .

## 10.2. ВМОРОЖЕННОСТЬ И СКИН-ЭФФЕКТ

Сравнивая второй член в правой части первого уравнения в (10.14) с членом в левой части, получим характерное время:

$$\tau_s = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}, \tag{10.16}$$

которое известно как скиновое время. На временах, меньших скинового времени, можно пренебречь диффузионным слагаемым в уравнении для магнитного поля в (10.14):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\nabla \cdot [\vec{u} \cdot \vec{B}]]. \quad (10.17)$$

Это уравнение называется «уравнением вмороженности». Докажем следующее утверждение: при движениях поперек прямого магнитного поля сохраняется величина  $B/n$ . Действительно, пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , а движение плазмы происходит поперек магнитного поля в плоскости  $x, y$ . Тогда уравнение (10.17) преобразуется к виду

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(Bu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Bu_y)}{\partial y} = 0. \quad (10.18)$$

Комбинируя это уравнение с уравнением непрерывности для концентрации

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nu_y)}{\partial y} = 0, \quad (10.19)$$

получаем

$$\frac{d(B/n)}{dt} = \frac{\partial(B/n)}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \frac{B}{n} = 0. \quad (10.20)$$

Таким образом, в тех областях, где плазма сжимается и ее концентрация возрастает, величина магнитного поля также пропорционально нарастает. Другими словами, силовые линии магнитного поля как бы вморожены в плазму и сжимаются или расходятся вместе с ней. Физический механизм вмороженности связан с электрическим полем, которое, согласно уравнению Максвелла, возникает при изменении магнитного поля во времени. Вихревое электрическое поле вызывает дрейф частиц в скрещенных  $[\vec{E} \cdot \vec{B}]$  полях, что приводит к сжатию или разрежению плазмы, пропорциональному изменению величины магнитного поля. Отметим, что сохранение величины  $B/n$  имеет место только при двумерных движениях поперек прямого магнитного поля, в общем же случае эволюция магнитного поля описывается общим уравнением (10.17).

В случае, когда движением плазмы поперек магнитного поля можно пренебречь, первое уравнение в (10.14) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \left[ \nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} [\nabla \cdot \vec{B}]) \right]. \quad (10.21)$$

В простом случае, когда проводимость постоянна и не зависит от координат, имеем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{B}. \quad (10.22)$$

Уравнение (10.22) представляет собой уравнение диффузии с коэффициентом диффузии магнитного поля:

$$D_B = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \quad (10.23)$$

Уравнение (10.21) или же упрощенное уравнение (10.22) описывает диффузионное проникновение магнитного поля в плазму. Проанализируем механизм такого проникновения на примере задачи о перестройке тока и полоидального магнитного поля в токамаке. В цилиндрической геометрии уравнение (10.21) для полоидального (азимутального) магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\sigma_{\parallel} r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} \right]. \quad (10.24)$$

В правую часть входит продольная проводимость  $\sigma_{\parallel} = ne^2 / (0,51 m_e v_{ei})$ . Согласно этому уравнению перестройка тока происходит за скиновое время  $\tau_s = 4\pi\sigma_{\parallel} a^2 / c^2$ , где  $a$  — радиус шнура. Предположим, например, что в плазме мгновенно возрастает полный ток  $I$  от значения  $I_0$  до  $I_1$ . Вначале распределение плотности тока по шнуру соответствует закону Ома:  $j_z \approx j_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel} \approx \sigma_{\parallel} E_z$ . В стационарном состоянии электрическое  $E_z$  постоянно во времени и не зависит от радиуса, поэтому радиальное распределение тока определяется радиальным профилем проводимости, которая пропорциональна  $T_e^{3/2}$ . При этом ток течет в основном в центральной горячей части шнура. Таким образом, зная радиальное распределение температуры, нетрудно найти величину и профиль тока из условия

$$\int_0^a 2\pi r j_z dr = I. \quad (10.25)$$

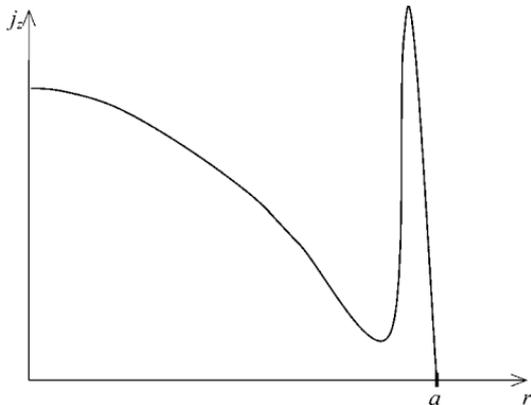
Вначале распределение полоидального магнитного поля  $B_{\theta}^0(r)$  соответствует обращению в ноль правой части (10.24), а полоидальное поле на границе шнура определяется значением полного тока:

$$B_{\theta}^0(a) = \frac{2I_0}{ca}. \quad (10.26)$$

Когда полный ток возрастает, мгновенно возрастает и полоидальное поле на границе шнура. Дальнейшая эволюция полоидального магнитного поля и связанного с ним уравнением Максвелла продольного тока определяется уравнением (10.25) с начальным условием

$$\begin{aligned} B_{\theta}(r, t=0) &= B_{\theta}^0(r), & r < a; \\ B_{\theta}(a) &= \frac{2I_1}{ca}, & r = a. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Так как в первый момент времени полоидальное магнитное поле скачком возрастает при  $r = a$ , то дополнительный продольный ток сосредоточен в бесконечно тонком слое вблизи границы шнура (рис. 10.1). Протекание такого тока обеспечивается скачком продольного индуцированного электрического поля. С течением времени ток проникает внутрь на расстояние скин-слоя, ширина которого растет как  $\delta \sim \sqrt{(c^2 / 4\pi\sigma_{\parallel})t}$ . На этом же масштабе меняется и полоидальное магнитное поле. Перестройка тока и полоидального магнитного поля заканчивается на



**Рис. 10.1**  
Скинированный  
профиль плотности  
тока при быстром  
увеличении полного  
тока

временах  $t > \tau_s$ , и новый профиль тока повторяет старый, но сам ток становится больше по абсолютной величине.

В общем случае, когда магнитное поле проникает в движущуюся плазму, следует пользоваться общим уравнением для магнитного поля в системе (10.14).

### 10.3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Проанализируем одномерные волны, которые возникают в рамках системы уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики (10.14) в бесстолкновительной плазме. Будем искать такое решение этой системы, в котором все величины являются функциями от координаты  $z$  и времени  $t$ , а следовательно, друг от друга. Отметим, что направление магнитного поля не совпадает с осью  $z$ . Уравнение, соответствующее адиабатическому приближению, запишем как условие сохранения энтропии  $ds/dt = 0$ , а в уравнении для магнитного поля пренебрежем членом, содержащим проводимость. Система уравнений (10.14) в одномерном случае принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + B_x \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_z \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_z \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c_s^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (10.28)$$

В предпоследнем уравнении непрерывности для ионов переходим к производным от давления с помощью соотношений

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dp} \Big|_{s=\text{const}} \frac{\partial p}{\partial t} = c_s^2 \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dp} \Big|_{s=\text{const}} \frac{\partial p}{\partial z} = c_s^2 \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Из уравнения для  $z$  — компонента магнитного поля  $\partial B_z / \partial t = 0$  следует, что величина  $B_z$  не зависит от времени. Из условия же  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , которое в одномерном случае принимает вид  $\partial B_z / \partial z = 0$ , получаем, что величина  $B_z$  не зависит и от координаты  $z$ . Таким образом, проекция магнитного поля на ось  $z$  остается постоянной в процессе распространения МГД-волны:  $B_z = \text{const}$ . Остальные семь уравнений (10.28) относительно семи величин  $u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, p, s$  необходимо решать совместно.

Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + Z(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad (10.29)$$

где  $\Psi$  — вектор в семимерном пространстве,  $\Psi = (u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, p, s)$ , а  $Z(\Psi)$  матрица:

$$Z(\Psi) = \begin{pmatrix} u_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_z & \frac{B_x}{4\pi\rho} & \frac{B_y}{4\pi\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -B_z & 0 & B_x & u_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & B_y & 0 & u_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_s^2 & 0 & 0 & u_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_z \end{pmatrix}. \quad (10.30)$$

Будем искать решения в виде линейных волн, то есть представим все величины в виде  $\Psi = \Psi^0 + \Psi^1$ , где вектор  $\Psi^1$  соответствует малым возмущениям. Линеаризуем уравнение (10.29):

$$\frac{\partial \Psi^1}{\partial t} + Z(\Psi^0) \frac{\partial \Psi^1}{\partial z} = 0. \quad (10.31)$$

Для простоты выберем систему отсчета, в которой отсутствует невозмущенная скорость вдоль оси  $z$ ,  $u_z = 0$  и отсутствует невозмущенное магнитное поле в направлении  $y$ ,  $B_y = 0$ . Последнее условие достигается поворотом системы координат относительно оси  $z$ . При этом матрица  $Z(\Psi)$  упрощается:

$$Z(\Psi^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -B_z & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.32)$$

Ищем вектор  $\Psi^1$  в виде  $\Psi^1 = A \exp(ikz - i\omega t)$ . Тогда из (10.31) имеем

$$ZA = VA, \quad (10.33)$$

где  $V = \omega/k$  — фазовая скорость волны. Уравнение (10.33) представляет собой задачу определения собственных чисел и собственных векторов матрицы  $Z(\Psi^0)$ . Приравнявая нулю определитель

$$\det(Z - VI) = 0, \quad (10.34)$$

где  $I$  — единичная матрица, получаем семь собственных частот.

Первые две из них соответствуют альфвеновской волне:

$$V_A = \pm c_A \cos\theta. \quad (10.35)$$

Здесь альфвеновская скорость  $c_A$  определена согласно (10.15), а  $\theta$  представляет собой угол между направлением распространения волны  $z$  и магнитным полем. Знаки « $\pm$ » соответствуют двум волнам, распространяющимся в противоположные стороны, то есть физически тому же типу волны. Вторые две фазовые скорости соответствуют быстрому магнитному звуку:

$$V_F = \pm \left[ \frac{c_A^2 + c_s^2 + \sqrt{(c_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta}}{2} \right]^{1/2}. \quad (10.36)$$

Фазовые скорости медленного магнитного звука дают-ся выражением

$$V_S = \pm \left[ \frac{c_A^2 + c_s^2 - \sqrt{(c_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta}}{2} \right]^{1/2}. \quad (10.37)$$

Последняя фазовая скорость соответствует энтропий-ной волне:

$$V_E = 0. \quad (10.38)$$

Зависимость фазовой скорости различных типов волн от угла с магнитным полем принято изображать на диа-грамме, которая называется фазовой полярой (рис. 10.2). Видно, что альфвеновская волна распространяется в основ-ном вдоль магнитного поля, при  $\theta = 0$ ,  $\pi$ -фазовая скорость альфвеновской волны совпадает с альфвеновской скоростью  $V_A = c_A$ , а поперек магнитного поля ее фазовая скорость рав-на нулю. Быстрая магнитозвуковая волна распространяет-ся как вдоль, так и поперек магнитного поля. В сильном магнитном поле  $c_A \gg c_s$  ее фазовая скорость совпадает с альфвеновской скоростью независимо от угла с магнитным полем. Третья мода называется медленным магнитным звуком. Эти волны распространяются в основном вдоль магнитного поля и в сильном магнитном поле  $c_A \gg c_s$  при  $\theta = 0$ ,  $\pi$ -фазовая скорость такой волны совпадает со скоро-стью ионного звука  $c_s$ . Фазовая скорость энтропийной вол-ны равна нулю.

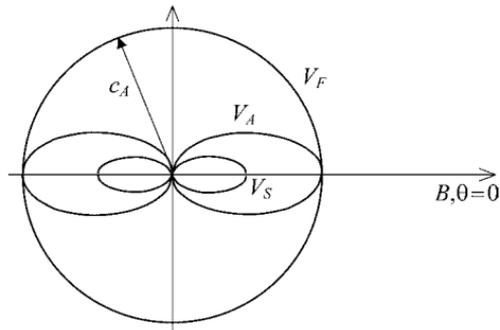


Рис. 10.2  
Фазовая поляра  
для МГД волн

Собственные вектора, которые соответствуют указанным модам, имеют вид (для  $0 < \theta < \pi/2$ )

$$\begin{aligned} A^A &= [0, c_A \cos \theta, 0, 0, -B_z, 0, 0], \\ A^F &= \left[ \frac{V_F c_A^2 \sin \theta \cos \theta}{V_A^2 - V_F^2}, 0, V_F, \frac{B_x V_F^2}{V_F^2 - V_A^2}, 0, \rho c_s^2, 0 \right], \\ A^S &= \left[ \frac{V_S c_A^2 \sin \theta \cos \theta}{V_A^2 - V_S^2}, 0, V_S, \frac{B_x V_S^2}{V_S^2 - V_A^2}, 0, \rho c_s^2, 0 \right], \\ A^E &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Компоненты собственных векторов показывают, какие величины возбуждены в той или иной моде, а также как они соотносятся. Так, например, в альфвеновской волне возбуждены скорость и магнитное поле вдоль оси  $y$ , а все остальные параметры остаются постоянными. При этом  $u_y^1 / B_y^1 = -c_A^0 \cos \theta / B_z^0$ .

Обсудим физические процессы в различных модах для простых вариантов распространения волны. Начнем с альфвеновской волны, распространяющейся вдоль магнитного поля,  $\theta = 0$ . Пусть имеется электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ , периодическое во времени и пространстве  $E_x^1 \sim \exp(-i\omega t + ikz)$ . Это поле вызывает дрейф частиц в скрещенных полях вдоль оси  $y$  со скоростью  $u_y^1 = -cE_x^1 / B_0$ . Одновременно возникает поляризационный ток ионов вдоль оси  $x$ :

$$j_x^1 = \frac{n_0 c^2 m_i}{B_0^2} \frac{\partial E_x^1}{\partial t} = -i\omega \frac{n_0 c^2 m_i}{B_0^2} E_x^1. \quad (10.40)$$

Этот ток создает магнитное поле  $B_y^1$  в соответствии с уравнением Максвелла:

$$j_x^1 = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_y^1}{\partial z} = -\frac{cik}{4\pi} B_y^1. \quad (10.41)$$

Переменное во времени магнитное поле, в свою очередь, создает вихревое электрическое поле:

$$-\frac{\partial B_y^1}{\partial t} = i\omega B_y^1 = c \frac{\partial E_x^1}{\partial z} = ikc E_x^1. \quad (10.42)$$

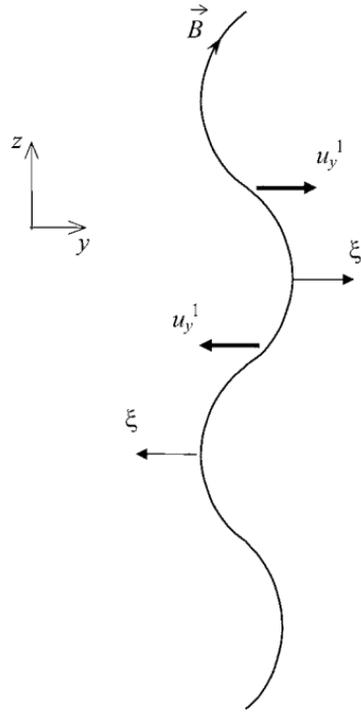
Исключая из уравнений (10.40)–(10.42) ток и электрическое поле, получаем

$$\omega^2 = k^2 (c_A^0)^2 \quad (10.43)$$

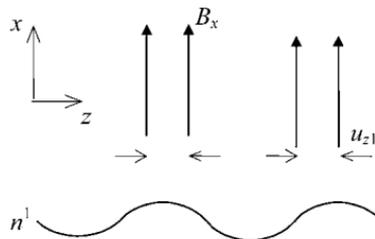
— закон дисперсии для альфвеновской волны.

Дрейф частиц в альфвеновской волне происходит на фоне однородной концентрации плазмы, поэтому возмущений концентрации не возникает. Возмущенными величинами являются скорость  $u_y^1$  и магнитное поле  $B_y^1$ , причем их отношение, как следует из (10.40), (10.41), есть  $u_y^1 / B_y^1 = -c_A^0 / B_0$ , что соответствует общему выражению для собственного вектора альфвеновской моды (10.39). Поперечная скорость дрейфа, таким образом, сдвинута по фазе на  $\pi$  с возмущения магнитного поля (рис. 10.3). Величина же смещения плазмы  $\xi = \int u_y^1 dt$  сдвинута по фазе на  $\pi/2$ .

Проанализируем таким же образом быструю магнитозвуковую волну, которая распространяется поперек магнитного поля в направлении  $z$ ,  $\theta = \pi/2$ . Основное магнитное поле направлено вдоль оси  $x$  (рис. 10.4). При этом будем полагать выполненным условие  $c_A \gg c_s$ , то есть будем считать магнитное поле



**Рис. 10.3**  
Фазовая поляра для МГД волн



**Рис. 10.4**  
Возмущение магнитного поля и концентрации плазмы при распространении быстрой магнитозвуковой волны

достаточно сильным. Пусть, как и в предыдущем случае, имеется электрическое поле, направленное вдоль оси  $y$ , периодическое во времени и пространстве:

$$E_y^1 \sim \exp(-i\omega t + ikz).$$

Дрейф плазмы происходит вдоль оси  $z$  со скоростью

$$u_z^1 = -cE_y^1 / B_0,$$

а поляризационный ток дается выражением

$$j_y^1 = \frac{n_0 c^2 m_i}{B_0^2} \frac{\partial E_y^1}{\partial t} = -i\omega \frac{n_0 c^2 m_i}{B_0^2} E_y^1. \quad (10.44)$$

Этот ток приводит к возмущению магнитного поля в направлении  $x$ :

$$j_y^1 = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_x^1}{\partial z} = \frac{cik}{4\pi} B_x^1, \quad (10.45)$$

которое создает переменное электрическое поле:

$$-\frac{\partial B_x^1}{\partial t} = i\omega B_x^1 = -c \frac{\partial E_y^1}{\partial z} = -ikc E_y^1. \quad (10.46)$$

Из (10.44)–(10.46) получаем дисперсионное уравнение, совпадающее с (10.43). Таким образом, быстрая магнито-звуковая волна распространяется с альфвеновской скоростью. Характер возмущений иллюстрируется схематически (см. рис. 10.4). В волне возмущено магнитное поле, причем силовые линии остаются прямыми. Как следует из (10.44)–(10.45), скорость частиц находится в фазе с возмущением магнитного поля, причем  $u_z^1 / B_x^1 = c_A^0 / B_0$  в соответствии с общим выражением (10.39). Концентрация в волне, как следует из уравнения непрерывности  $-i\omega n^1 + ikn_0 u_z^1 = 0$ , также возмущена, причем  $n^1 / n_0 = B_x^1 / B_0$ . Последнее соотношение есть следствие уравнения в замороженности (10.17) и сохранения отношения  $B/n$  при движениях поперек магнитного поля. Оно также соответствует собственному вектору (10.39).

Быстрая магнито-звуковая волна, распространяющаяся поперек магнитного поля, напоминает ионно-звуковую волну, в которой роль давления плазмы играет магнитное давление  $B^2/8\pi$ . Действительно, альфвеновская скорость

получается, если в скорости ионного звука заменить давление плазмы магнитным давлением, а возмущение магнитного поля соответствует возмущению давления в ионно-звуковой волне. В пределе  $c_A \ll c_s$  быстрый магнитный звук переходит в ионно-звуковую волну, как следует из (10.39). Быстрая магнитозвуковая волна, распространяющаяся вдоль магнитного поля, представляет собой альфвеновскую волну с другой поляризацией. При  $\theta \rightarrow 0$  в выражении для собственного вектора  $A^F$  первый и четвертый компонент расходятся как  $\theta^{-1}$ , так как  $V_A^2 - V_f^2 \rightarrow c_A^2 \sin^2 \theta$  и  $B_x = B \sin \theta$ . Остальные члены остаются конечными и ими можно пренебречь. Отношение же первого и четвертого членов соответствует  $u_x^1 / B_x^1 = c_A^0 / B_0$ , т. е. соответствует альфвеновской волне, у которой возмущен  $x$ -компонент магнитного поля, а движение плазмы также происходит в направлении  $x$ .

Медленная магнитозвуковая волна, распространяющаяся вдоль магнитного поля, в сильном магнитном поле соответствует ионно-звуковой волне.

Энтропийная волна соответствует возмущению энтропии при невозмущенном полном давлении. Пусть, например, имеется положительное возмущение концентрации  $n^1(z)$  и отрицательные возмущения температур  $T_e^1(z)$  и  $T_i^1(z)$  такие, что  $n^1 / n_0 = -(T_e^1 + T_i^1) / (T_e^0 + T_i^0)$ . Так как возмущение давления отсутствует, то такое возмущение в отсутствие диссипативных процессов будет оставаться в покое неограниченно долго, как следует из уравнения суммарного баланса сил. В то же время энтропия, пропорциональная  $\ln(T_{e,i}^{3/2} / n)$ , в таком образовании возмущена.

МГД-волны затухают из-за диссипативных процессов. Кроме того, существует и специфический бесстолкновительный механизм затухания из-за непрерывной зависимости фазовой скорости от координат. Проиллюстрируем этот механизм на примере альфвеновской волны, распространяющейся вдоль магнитного поля  $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$  в неоднородной плазме с концентрацией, зависящей от координаты  $x$ . Из условия равновесия (7.5) следует, что в такой плазме выполнено соотношение  $p_0 + B^2 / 8\pi = \text{const}(x)$ . Если  $\beta \ll 1$ , то магнитное поле возмущено слабо  $B \approx B_0$  и зависимость

альфвеновской скорости от координаты  $x$  связана, в основном, с неоднородной концентрацией:

$$c_A(x) = \sqrt{B_0^2 / 4\pi m_i n_0(x)}. \quad (10.47)$$

Рассмотрим локализованный по  $x$  пакет альфвеновских волн, в которых возмущен  $y$ -компонент магнитного поля:

$$\delta B_y = b(x) \exp(-i\omega t + ikz). \quad (10.48)$$

Фазовая скорость альфвеновской волны  $\omega/k = c_A$  зависит от  $x$ , поэтому волны, имеющие при  $z = 0$  одинаковую фазу, при больших значениях  $z$  разойдутся по фазам. Так как в эксперименте всегда происходит усреднение по пространству, то усредненное по координате  $x$  значение возмущенного магнитного поля должно стремиться к нулю вследствие разбегания волн по фазам. Это проявляется как эффективное бесстолкновительное затухание альфвеновских волн, хотя реального диссипативного затухания не происходит. Действительно, рассмотрим среднее в некотором интервале  $2\delta$  возмущение магнитного поля:

$$\langle \delta B_y \rangle = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \delta B_y dx = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} b(x) \exp(-i\omega t + ikz) dx. \quad (10.49)$$

Так как  $\omega(x) = kc_A(x)$ , то перейдем в этом интеграле к интегрированию по  $\omega$ :

$$\langle \delta B_y \rangle = \frac{\exp(ikz)}{2\delta} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \tilde{b}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (10.50)$$

где

$$\tilde{b}(\omega) = \frac{b(x(\omega))}{d\omega/dx}, \quad \omega_{\pm} = \omega(x \pm \delta),$$

Интегрируя (10.50) по частям, получаем

$$\langle \delta B_y \rangle = \frac{\exp(ikz)}{2\delta} \times \left[ -\frac{\tilde{b}(\omega) \exp(-i\omega t)}{it} \Big|_{\omega_-}^{\omega_+} + \frac{1}{it} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{d\tilde{b}(\omega)}{d\omega} \exp(-i\omega t) d\omega \right]. \quad (10.51)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям, получим ряд по обратным степеням  $t$ . При  $t \rightarrow \infty$  все члены этого ряда обращаются в ноль и  $\langle \delta B_y \rangle$  также стремится к нулю, так что происходит затухание среднего возмущенного магнитного поля.

#### 10.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

В общем случае нелинейные волны описываются матричным уравнением (10.29). Найдем в плоскости  $(z, t)$  линии

$$z = \zeta(t), \quad (10.52)$$

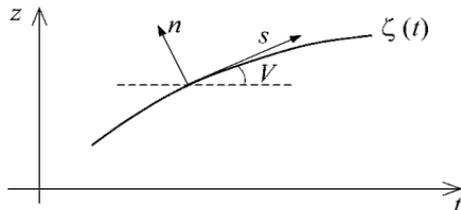
которые называются характеристиками (рис. 10.5). На каждой такой линии величина  $\Psi$  определяется начальными условиями и сохраняется, а значение  $\Psi$  вне характеристики не может быть найдено по значению  $\Psi$  на характеристике. Выразим производные  $\partial\Psi/\partial z$  и  $\partial\Psi/\partial t$  через производную по нормали к характеристике  $\partial\Psi/\partial n$  и производную вдоль характеристики  $\partial\Psi/\partial s$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{1+V^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial s} - \frac{V}{\sqrt{1+V^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} &= \frac{V}{\sqrt{1+V^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial s} + \frac{1}{\sqrt{1+V^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial n}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Здесь  $V = d\zeta/dt$  — тангенс угла наклона касательной к кривой  $z = \zeta(t)$ . Подставляя эти соотношения в уравнение (10.29), получим

$$(Z - VI) \frac{\partial\Psi}{\partial n} = -(VZ + I) \frac{\partial\Psi}{\partial s}. \quad (10.54)$$

Рис. 10.5  
Характеристика  
в плоскости  $(t, z)$



По определению характеристики значение  $\Psi$  вне характеристики не может быть определено по значению  $\Psi$  на ней, поэтому величина  $\partial\Psi/\partial n$  не может быть найдена из (10.54). На характеристике  $\partial\Psi/\partial s = 0$ . Следовательно, матрица, обратная матрице  $Z - VI$ , не должна существовать. Отсюда получаем соотношение

$$\det(Z - VI) = 0, \quad (10.55)$$

полностью совпадающее с (10.34). Как и в линейном случае, получается 7 типов простых волн и 7 фазовых скоростей  $d\zeta(t)/dt = V$ . Отличие состоит в том, что матрица  $Z(\Psi)$  (10.30) зависит от величины  $\Psi$ , и поэтому  $V = V(\Psi)$ . Так как  $\Psi$  сохраняется на характеристике, то значение  $V$  постоянно на характеристике и характеристика является прямой линией. В то же время тангенс угла наклона различен для разных характеристик, т. е. скорость распространения волны зависит от амплитуды.

Продемонстрируем особенности распространения простой нелинейной МГД-волны на примере нелинейной альфвеновской волны, распространяющейся вдоль магнитного поля. Пусть в волне возмущены компоненты  $u_y$  и  $B_y$ . Как следует из общего анализа раздела 10.3, магнитное поле  $B_z$  в одномерной волне остается постоянным. Второе и пятое уравнения системы (10.28) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Нетрудно убедиться, что решение системы уравнений (10.56) совпадает с решениями системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} - V \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} - V \frac{\partial u_y}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (10.57)$$

если

$$V = c_A = \sqrt{\frac{B_z^2}{4\pi\rho}}. \quad (10.58)$$

Из третьего уравнения системы (10.28)

$$\frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = 0 \quad (10.59)$$

следует

$$p + \frac{B_y^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (10.60)$$

Таким образом, там, где возрастает магнитное поле, возросшее магнитное давление (при этом  $B_z = \text{const}$ ) вытесняет плазму, уменьшая ее газокINETическое давление и плотность. Альфвеновская скорость (10.58) пропорциональна  $\rho^{-1/2}$ , а с учетом адиабатической зависимости  $p \sim \rho^{5/3}$  величина  $V \sim p^{-0.3}$ , т. е. с ростом давления скорость распространения падает и наоборот. Поэтому области волны с большим магнитным полем распространяются быстрее, чем области с меньшим магнитным полем, в результате чего происходит опрокидывание альфвеновской волны.

Во втором примере рассмотрим нелинейную быструю магнитозвуковую волну, распространяющуюся поперек магнитного поля  $B_x$ . Так как при поперечных движениях сохраняется величина

$$b = \frac{B_x}{\rho} = \text{const}, \quad (10.61)$$

то уравнение баланса сил вдоль  $z$  удобно переписать в виде

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial B_x^2}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z}, \quad (10.62)$$

где

$$p^* = p + \frac{b^2 \rho^2}{8\pi}.$$

Уравнение (10.62) совместно с уравнением непрерывности совпадает с уравнениями для нелинейных ионно-звуковых волн (см. раздел 9.3), с заменой  $p$  на  $p^*$ . Волна распространяется с альфвеновской скоростью (при  $c_A \gg c_s$ ), к которой надо добавить скорость среды:

$$V = u_z + c_A \approx c_A = \sqrt{\frac{dp^*}{d\rho}} = \sqrt{\frac{b^2 \rho}{4\pi}} = \sqrt{\frac{b B_x}{4\pi}}. \quad (10.63)$$

Так как скорость распространения волны пропорциональна  $B_x^{1/2}$ , происходит опрокидывание волны.

## 10.5. МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ С ДИСПЕРСИЕЙ

Покажем на примере нелинейных магнито-звуковых волн, что и в магнитном поле существуют решения типа солитонов, которые распространяются поперек магнитного поля, не расплываясь. Однако, в отличие от ионно-звуковых солитонов, которые получаются при учете отклонения от квазинейтральности, магнито-звуковые солитонные решения появляются при учете инерции электронов. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , а волна движется по  $x$  со скоростью  $V$ , причем будем искать такие решения, при которых  $V = \text{const}$  и не зависит от амплитуды волны, т. е. все величины будем искать в виде

$$\Psi = \Psi(x - Vt).$$

Будем исходить из уравнений двухжидкостной МГД в пренебрежении столкновениями и температурами частиц. Переходя в уравнениях непрерывности для электронов и ионов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu_{xe,i})}{\partial x} = 0 \quad (10.64)$$

к переменной  $\xi = x - Vt$ , имеем

$$-V \frac{dn}{d\xi} + \frac{d(nu_{xe,i})}{d\xi} = 0. \quad (10.65)$$

Интегрируя (10.65) и полагая  $n(\xi \rightarrow \infty) = n_0$  и  $u_{xe,i}(\xi \rightarrow \infty) = 0$ , получаем

$$n(u_{xe,i} - V) = -n_0 V. \quad (10.66)$$

Из уравнений непрерывности следует, что скорости электронов и ионов в направлении  $x$  совпадают:  $u_{xe} = u_{xi} = u$ . Компоненты уравнения баланса сил после замены переменных преобразуются к виду

$$\begin{aligned} m_{e,i} \frac{du_{xe,i}}{d\xi} (u_{xe,i} - V) &= \mp e E_x \mp \frac{e}{c} u_{ye,i} B, \\ m_{e,i} \frac{du_{ye,i}}{d\xi} (u_{xe,i} - V) &= \mp e E_y \pm \frac{e}{c} u_{xe,i} B. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Электрические и магнитные поля связаны уравнением Максвелла  $[\nabla \cdot \vec{E}] = -(1/c)\partial\vec{B}/\partial t$ , которое при переходе к переменной  $\xi = x - Vt$  имеет вид

$$\frac{dE_y}{d\xi} = \frac{V}{c} \frac{dB}{d\xi}. \quad (10.68)$$

Интегрируя и учитывая, что  $E_y(\xi \rightarrow \infty) = 0$  и  $B(\xi \rightarrow \infty) = B_0$ , находим

$$E_y = \frac{V}{c}(B - B_0). \quad (10.69)$$

Другое уравнение Максвелла  $\nabla \cdot \vec{B} = (4\pi/c)\vec{j}$  дает

$$-\frac{dB}{d\xi} = \frac{4\pi}{c} en(u_{yi} - u_{ye}). \quad (10.70)$$

Складывая  $x$ -компоненты баланса сил для электронов и ионов в (10.67), учитывая  $u_{xe} = u_{xi} = u$  и  $m_i \gg m_e$ , получаем

$$m_i(u - V) \frac{du}{d\xi} = \frac{e}{c}(u_{yi} - u_{ye})B. \quad (10.71)$$

Комбинируем это уравнение с (10.70) и с уравнением непрерывности (10.66), получаем

$$m_i n_0 V \frac{du}{d\xi} = \frac{B}{4\pi} \frac{dB}{d\xi}. \quad (10.72)$$

После интегрирования имеем

$$u = \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_0 V}. \quad (10.73)$$

Сложим теперь два  $y$ -компонента уравнения баланса сил (10.67). Получим  $m_e u_{ye} + m_i u_{yi} = 0$ , откуда следует

$$u_{ye} \gg u_{yi}. \quad (10.74)$$

Другими словами, возмущение магнитного поля в волне создается током электронов, и током ионов в (10.70) можно пренебречь. Подставляя электронную скорость  $u_{ye}$ , выраженную через производную магнитного поля из уравнения (10.70), во второе уравнение (10.67), используя связь электрического и магнитного полей (10.69), выражение для концентрации (10.66) и соотношение (10.73), получаем уравнение для магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\delta^2}{V} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{dB}{d\xi} \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_0 V} - V \right) \right] \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_0 V} - V \right) = \\
 = \left[ \frac{(B^2 - B_0^2)}{8\pi m_i n_0 V} - V \right] B + VB_0.
 \end{aligned} \quad (10.75)$$

Здесь масштаб

$$\delta = \frac{c}{\omega_{pe}}, \quad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}} \quad (10.76)$$

определяет характерный пространственный размер возмущения. Эту величину называют бесстолкновительным скин-слоем. Умножая обе части уравнения (10.75) на  $dB/d\xi$  и интегрируя, получаем

$$-\delta^2 \left( \frac{dB}{d\xi} \right)^2 \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_0 V} - V \right)^2 = \frac{(B^2 - B_0^2)^2}{16\pi n_0 m_i} - V^2 (B - B_0)^2 + \text{const.} \quad (10.77)$$

Выберем константу интегрирования равной нулю, тогда на бесконечности, где  $B = B_0$ , производная  $dB/d\xi = 0$ . Из (10.77) имеем

$$\delta \frac{dB}{d\xi} = \pm \frac{B - B_0}{\frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_0 V^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{(B + B_0)^2}{16\pi m_i n_0 V^2}}. \quad (10.78)$$

Фазовые кривые для этого случая приведены на рис. 10.6. Искомое солитонное решение соответствует нарастанию магнитного поля от значения  $B_0$  до  $B_{\max}$  (ветвь  $dB/d\xi > 0$ ) и дальнейшему падению поля от  $B_{\max}$  до  $B_0$

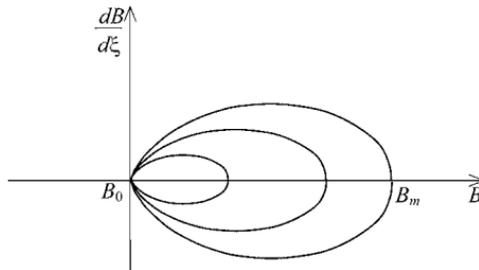


Рис. 10.6  
Фазовые кривые в плоскости  $(B, dB/d\xi)$

(ветвь  $dB/d\xi < 0$ ). В точке максимума  $dB/d\xi = 0$ , откуда согласно (10.78)

$$V = \sqrt{\frac{(B_{\max} + B_0)^2}{16\pi n_0 m_i}}. \quad (10.79)$$

Это соотношение дает связь между скоростью магнито-звукового солитона и его амплитудой. Форма солитона может быть найдена дальнейшим интегрированием (10.78). Пример солитона приведен на схематическом рис. 10.7. Введем альфвеновское число Маха:

$$M = \frac{V}{c_A} = \frac{V\sqrt{4\pi n_0 m_i}}{B_0}. \quad (10.80)$$

Для малых возмущений  $B \rightarrow B_0$  скорость солитона стремится к альфвеновской скорости, так что  $M \rightarrow 1$ . При увеличении амплитуды возрастает и число Маха в соответствии с (10.79) до тех пор, пока знаменатель в (10.78) не обратится в ноль. Критическое максимальное значение магнитного поля, как следует из (10.78), (10.79), соответствует  $B_{\max} = 3B_0$  и  $M = 2$ . При этом производная в максимуме  $dB/d\xi \rightarrow \infty$  (рис. 10.7). Таким образом, магнито-звуковые солитоны могут существовать в диапазоне альфвеновских чисел Маха:

$$1 \leq M \leq 2. \quad (10.81)$$

При больших значениях чисел Маха эффекты, связанные с электронной инерцией, не могут остановить опрокидывание и возникают бесстолкновительные ударные волны.

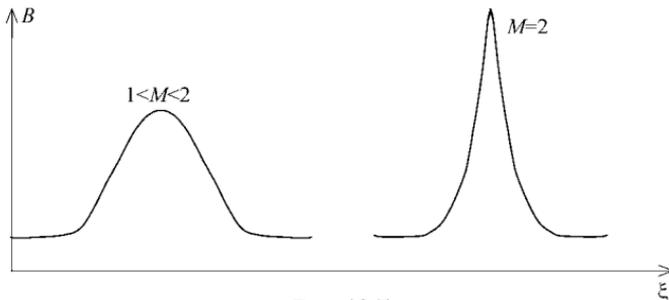


Рис. 10.7  
Магнито-звуковой солитон

# Глава 11. ДИНАМИКА ПЛАЗМЕННЫХ ПУЧКОВ И СГУСТКОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## 11.1. ДВИЖЕНИЕ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

Рассмотрим плазменный сгусток, движущийся при  $t = 0$  поперек магнитного поля вдоль оси  $x$  со скоростью  $\vec{u}_0$  (рис. 11.1). Из уравнения баланса сил для электронов следует, что такое движение происходит из-за его поляризации в направлении  $y$ , причем

$$\vec{u}_0 = \frac{c[\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0]}{B^2}. \quad (11.1)$$

Другими словами, движение сгустка происходит за счет дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях. Чтобы проанализировать дальнейшее движение сгустка, рассмотрим суммарное уравнение баланса сил

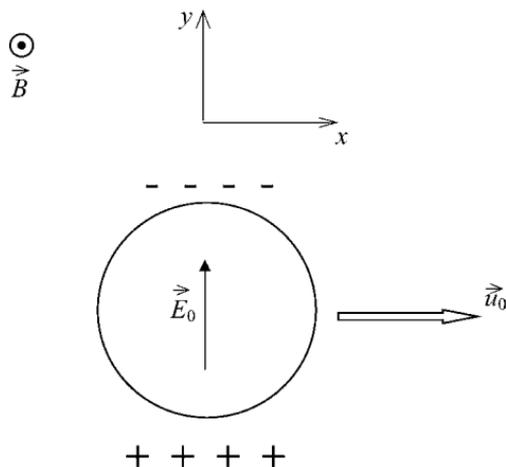


Рис. 11.1  
Поляризация сгустка,  
движущегося поперек  
магнитного поля

(в пренебрежении электронной инерцией) (10.2). Умножая обе части векторно на  $\vec{B}$ , получим для плотности тока

$$\vec{j} = \frac{c[\vec{B} \cdot \nabla p]}{B^2} + \frac{c[\vec{B} \cdot n m_i \frac{d\vec{u}_i}{dt}]}{B^2}. \tag{11.2}$$

Первое слагаемое представляет собой диамагнитный ток, дивергенция которого в однородном магнитном поле равна нулю. Второе слагаемое соответствует инерционному или поляризаационному току. Если сгусток в среднем тормозится, то этот ток должен быть направлен вертикально вниз. Однако такая ситуация невозможна, так как это противоречит условию

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \tag{11.3}$$

Поэтому вертикальный ток отсутствует и, соответственно, инерция обращается в ноль. Сгусток же движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{u}_0$  (11.1). С точки зрения отдельных частиц это означает, что сила Лоренца  $u_0 B/c$ , стремящаяся отклонить заряженную частицу в вертикальном направлении, компенсируется вертикальным электрическим полем  $\vec{E}_0$ .

Этот результат, строго говоря, справедлив для сгустка, сильно вытянутого в направлении движения  $x$ , когда электрическое поле внутри сгустка практически однородно. Если же размеры сгустка вдоль направлений  $x$  и  $y$  сравнимы, то сказывается неоднородность электрического поля, которая наряду с движением со скоростью  $\vec{u}_0$ , приводит к деформации сгустка (см. ниже).

Плазменный сгусток, помещенный в поле силы тяжести (рис. 11.2), в магнитном поле дополнительно поляризуется. Действительно, из-за дрейфа ионов под действием силы тяжести

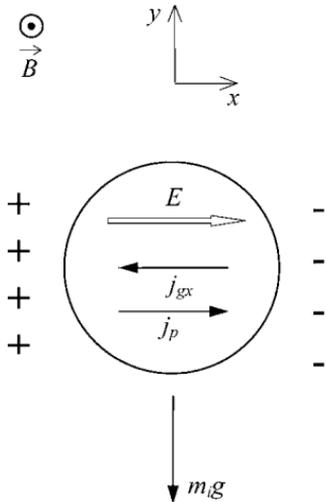


Рис. 11.2  
Плазменный сгусток  
в поле силы тяжести

в направлении  $[m_i \vec{g} \cdot \vec{B}]$  возникает ток ионов в отрицательном направлении оси  $x$ :

$$j_{gx} = -\frac{cnm_i g}{B}. \quad (11.4)$$

Вкладом электронов в этот ток можно пренебречь, так как скорость соответствующего дрейфа в  $m_i/m_e$  раз меньше. Ток  $j_{gx}$  приводит к поляризации сгустка. Возникающее электрическое поле вызывает противоток  $j_p$ , который должен компенсировать ток  $j_{gx}$ :

$$j_{px} = j_{gx}. \quad (11.5)$$

В полностью ионизованной плазме и однородном электрическом поле такой противоток представляет собой поляризационный или инерциальный ток, связанный с изменением электрического поля во времени:

$$\vec{j}_p = \frac{c^2 nm_i}{B^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (11.6)$$

Это выражение соответствует второму слагаемому в (11.2), если учесть, что  $\vec{u}_i = c[\vec{E} \cdot \vec{B}]/B^2$ , и в однородном электрическом поле  $d\vec{u}_i/dt = \partial\vec{u}_i/\partial t$ . Из (11.4)–(11.6) следует, что электрическое поле вдоль оси  $x$  растет линейно со временем

$$E_x = \frac{Bgt}{c}. \quad (11.7)$$

Возрастающее во времени электрическое поле вызывает дрейф сгустка вниз со скоростью

$$V_y = -\frac{cE_x}{B} = -gt, \quad (11.8)$$

что соответствует падению сгустка с ускорением  $\vec{a} = \vec{g}$ . Как и в предыдущем случае, неоднородность электрического поля приводит к его дополнительной деформации.

Движение плазменного сгустка в неоднородном магнитном поле аналогично движению в поле силы тяжести. Рассмотрим в качестве примера магнитное поле тора (токамака)  $B = B_0 R_0/R$  (рис. 11.3). В таком неоднородном магнитном поле заряженные частицы испытывают вертикальный дрейф:

$$V_{iy} = \frac{cm_j \left( \frac{V_{i\perp}^2}{2} + V_{i\parallel}^2 \right)}{e_j BR}, \quad (11.9)$$

где  $V_{i\perp}$  — скорости отдельных частиц. Первое слагаемое здесь вызвано силой, выталкивающей ларморовские

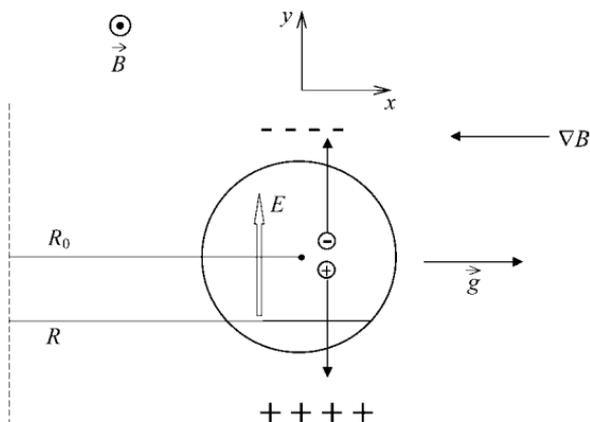


Рис. 11.3

Ускорение плазменного сгустка в неоднородном магнитном поле

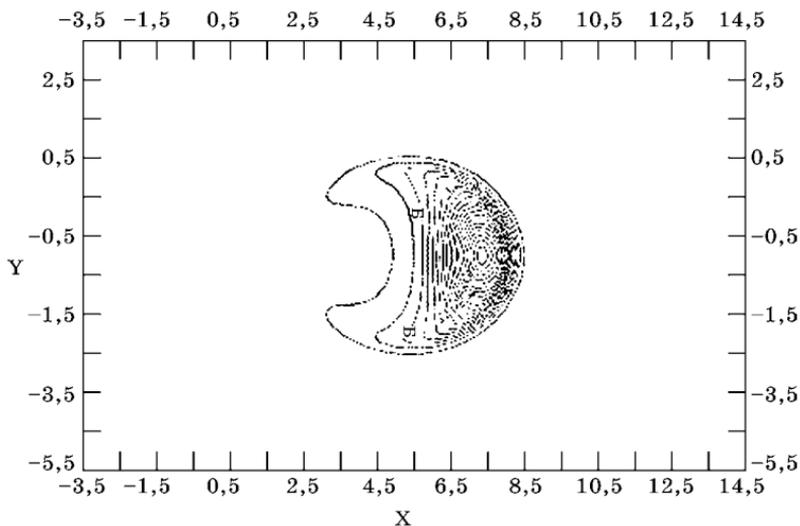


Рис. 11.4

Поверхности постоянной концентрации для плазменного сгустка в неоднородном магнитном поле. Момент времени  $t = 4$

кружки в область слабого магнитного поля, а второе слагаемое связано с центробежной силой из-за кривизны силовых линий магнитного поля. Дрейф электронов и ионов направлен в разные стороны из-за разного знака заряда, поэтому возникает вертикальный ток. Его величину получим, усреднив выражения для скоростей дрейфа с максвелловской функцией распределения:

$$j_y = e \int (V_{iy} f_i^M - V_{ey} f_e^M) d\vec{V} = \frac{2cn(T_e + T_i)}{BR}. \quad (11.10)$$

Отметим, что дивергенция этого тока, обусловленного дрейфом ведущих центров ларморовских орбит, совпадает с дивергенцией диамагнитного тока, который описывается первым слагаемым в (11.2). Ток (11.10) должен быть скомпенсирован противотоком (11.6). В результате возникает вертикальное электрическое поле, растущее во времени, которое вызывает дрейф сгустка против градиента магнитного поля с ускорением

$$g = \frac{2(T_e + T_i)}{m_i R}. \quad (11.11)$$

В общем случае, с учетом реальной формы сгустка, его динамика определяется системой уравнений (11.2)–(11.3). Считаем, что в первом приближении скорости электронов и ионов совпадают и представляют собой дрейф в скрещенных полях:  $\vec{u}_e = \vec{u}_i = c[\vec{E} \cdot \vec{B}]/B^2$ . Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x/a; \quad \tilde{y} = y/a; \\ \tilde{t} &= t(g/a)^{1/2}; \quad \tilde{\phi} = c\phi/(Ba^{3/2}g^{1/2}), \end{aligned} \quad (11.12)$$

где  $a$  — характерный размер сгустка,  $\phi$  — потенциал, а ускорение  $g$  определено согласно (11.1). Тогда из (11.2)–(11.3) получаем

$$\frac{\partial \nabla \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} + J(\tilde{\phi}, \Delta \tilde{\phi}) + \left[ \frac{\partial \nabla \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} + J(\tilde{\phi}, \nabla \tilde{\phi}) \right] \nabla \ln n + \frac{\partial \ln n}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (11.13)$$

где оператор  $J$  определен как

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Уравнение непрерывности в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + J(\tilde{\phi}, n) = 0. \quad (11.14)$$

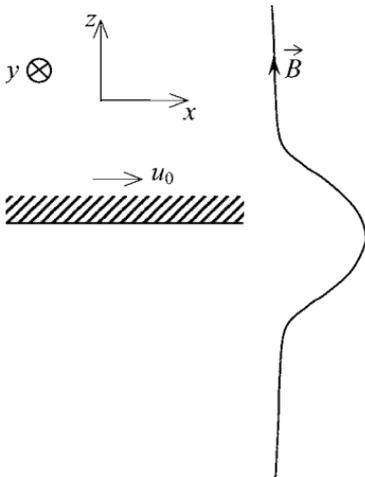
Здесь учтено, что в однородном магнитном поле

$$\nabla \cdot [\vec{E} \cdot \vec{B}] / B^2 = 0,$$

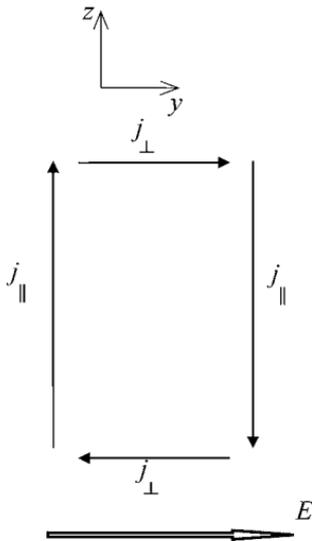
а поправками, возникающими при дифференцировании  $B$ , мы пренебрегаем. Уравнение (11.14) описывает движение плазмы вдоль эквипотенциалей. Численное решение системы уравнений (11.13)–(11.14) показывает, что сгусток действительно движется с ускорением (11.11) в направлении  $x$ , а его форма напоминает шапку гриба, так как верхняя и нижняя части в дипольном потенциале начинают двигаться в обратном направлении (см. рис. 11.4).

## 11.2. ТОРМОЖЕНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУИ В ФОНОВОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим теперь динамику плазмы, инжектированной поперек магнитного поля в фоновую плазму. Для простоты будем считать, что размер сгустка в направлении инъекции  $x$  бесконечен, т. е. в направлении  $x$  инжектирована струя плазмы, движущаяся при  $t = 0$  со скоростью  $u_0$  (см. рис. 11.5). Концентрация плазмы в струе  $n_I(y, z)$  намного больше, чем концентрация окружающей фоновой плазмы  $n_i$ , а масса ионов струи  $m_I$ , вообще говоря, отличается от массы ионов фоновой плазмы  $m_i$ . Инжектированная плазма в однородном магнитном поле поляризуется в направлении  $y$ , как это обсуждалось в предыдущем разделе, и возникает поле  $\vec{E}_0$ , удовлетворяющее соотношению (11.1). Однако из-за наличия фоновой плазмы это электрическое поле распространяется в обе стороны вдоль магнитного поля в виде альфвеновской волны. При этом на фронте альфвеновской волны электрическое поле нарастает и возникает поляризационный ток в направлении  $y$ , который компенсирует ток в направлении  $y$  внутри струи, возникающий из-за ее торможения. Схема замыкания токов приведена на рис. 11.6.



**Рис. 11.5**  
Струя плазмы, движущаяся при  $t = 0$  поперек магнитного поля со скоростью  $\vec{u}_0$



**Рис. 11.6.**  
Схема замыкания токов по фоновой плазме при инжекции струи поперек магнитного поля при  $z > 0$ . При отрицательных значениях  $z$  картина симметрична.

Найдем закон торможения струи при условии  $u_0 \ll \ll c_A$ , где  $c_A = B/(4\pi n_i m_i)^{1/2}$  — альфвеновская скорость в фоновой плазме. При выполнении этого условия возмущенное магнитное поле в альфвеновской волне мало:  $B_x \sim \sim u_x B/c_A \ll B$ , так что магнитное поле можно считать невозмущенным. Распространение альфвеновской волны вне струи описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2};$$

$$c_A^2 = \frac{B^2}{4\pi m_i n_i}. \quad (11.15)$$

Внутри струи имеем аналогичное уравнение:

$$n_I m_I \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}. \quad (11.16)$$

Проинтегрируем (11.16) вдоль  $z$  от  $-z_0$  до  $z_0$ , где  $z_0$  выберем так, чтобы было выполнено условие

$$a_{\parallel} < z_0 \ll L_A = c_A t,$$

где  $a_{\parallel}$  — характерный размер струи вдоль магнитного поля. На этих расстояниях скорость плазмы  $u_x$  можно считать не зависящей от  $z$ , так как характерный масштаб ее изменения совпадает с  $L_A$ . После интегрирования имеем

$$M_I \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{-z_0}^{z_0}, \quad (11.17)$$

где

$$M_I = \int_{-z_0}^{z_0} m_I n_I dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} m_I n_I dz \quad (11.18)$$

— интегральная масса инжектированных ионов, приходящаяся на единицу длины. Используя симметрию, ограничимся областью положительных значений  $z$ . Устремляя  $z_0 \rightarrow 0$ , получаем

$$M_I \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = \frac{B^2}{2\pi} \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (11.19)$$

Это соотношение представляет собой граничное условие для уравнения (11.15), описывающего распространение альфвеновской волны в фоновой плазме. Начальное же условие:

$$u_x = \begin{pmatrix} u_0, & z=0 \\ 0, & z>0 \end{pmatrix}. \quad (11.20)$$

Так как решение волнового уравнения (11.15) есть  $u_x = u_x(z - c_A t)$ , то, с учетом граничного и начального условий,

$$\begin{aligned} u_x &= u_0 \exp\left[\frac{B^2}{2\pi M_I c_A^2}(z - c_A t)\right] & z \leq c_A t, \\ u_x &= 0 & z > c_A t. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Профиль скорости (11.21) приведен на рис. 11.7. Видно, что фоновая плазма увлекается струей в направлении  $x$  на масштабе  $z_\tau = c_A t$ . При этом волна увлечения представляет собой фронт, распространяющийся вдоль магнитного поля с альфвеновской скоростью. Скорость самой струи соответствует  $z = 0$  и экспоненциально спадает со временем:

$$u_x(0, t) = u_0 \exp(-t/\tau_A), \quad \tau_A = \frac{2\pi M_I c_A}{B^2}. \quad (11.22)$$

Физический смысл постоянной времени  $\tau_A$  состоит в следующем: интегральная масса фоновой плазмы на единицу длины, увлекаемой струей за время  $\tau_A$ , составляет

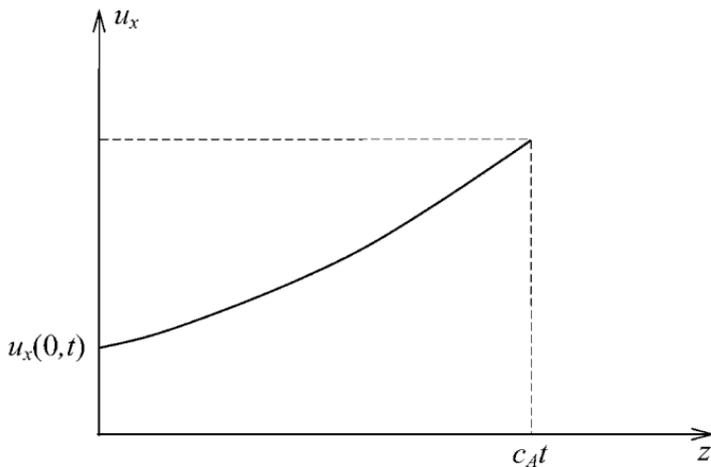


Рис. 11.7

Профиль скорости фоновой плазмы  
в фиксированный момент времени

следующую величину (с учетом положительных и отрицательных значений  $z$ ):

$$M_i(\tau_A) = 2z_\tau n_i m_i = M_I. \quad (11.23)$$

Другими словами, за время  $\tau_A$  в движение вовлекается интегральная масса фоновой плазмы, равная интегральной массе струи. За это же время скорость струи существенно уменьшается.

Так как электрическое поле, вызывающее дрейф плазмы со скоростью (11.21) до расстояний  $z = \pm c_A t$ , экспоненциально спадает со временем, то вдоль оси  $y$  течет отрицательный поляризационный ток (см. рис. 11.6). Интегральный ток (для положительных значений  $z$ ) получается интегрированием вдоль магнитного поля:

$$I = I_c + I_0 = \int_0^{c_A t} \frac{c^2 (n_I m_I + n_i m_i)}{B^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} dz = -\frac{c^2}{2\pi c_A} E_y(z=0), \quad (11.24)$$

где  $E_y(z=0) = u_0 B c^{-1} \exp(-t/\tau_A)$ . Интегральный ток состоит из двух одинаковых частей. Первая часть  $I_c$  получается за счет интегрирования по струе, при этом  $E_y$  берется

при  $z = 0$ , а интеграл от  $n_I(z)m_I$  дает  $M_I/2$ . Второй такой же вклад  $I_0$  дает интеграл по фоновой плазме с учетом (11.21) и соотношения  $E_y = u_x B/c$ . Этот ток течет в области  $0 < z < c_A t$ . Ток  $I$  должен замыкаться противотоком в положительном направлении оси  $y$ , как следует из уравнения непрерывности для тока. Поэтому на фронте альфвеновской волны, где фоновая плазма ускоряется от нулевой скорости до значения  $u_0$ , должен существовать положительный ток  $I_F = -I$ . Разделим теперь интегральные токи по-другому. Выделим отдельно интегральный ток струи:

$$I_c = -\frac{c^2}{4\pi c_A} E_y(z=0) \quad (11.25)$$

и равный ему интегральный ток по фоновой плазме с учетом тока на фронте альфвеновской волны:

$$I_W = I_c + I_F = \frac{c^2}{4\pi c_A} E_y(z=0). \quad (11.26)$$

Последний ток может быть записан в виде

$$I_W = \Sigma_W E_y(z=0); \quad \Sigma_W = \frac{c^2}{4\pi c_A}, \quad (11.27)$$

где величина  $\Sigma_W$  называется альфвеновской проводимостью.

Другими словами, фоновая плазма с распространяющейся в ней альфвеновской волной эквивалентна сопротивлению (11.27) (следует помнить, что такой же ток течет и с другой стороны струи при отрицательных значениях  $z$ ). Понятие альфвеновской проводимости фоновой плазмы может быть использовано в самых разнообразных задачах физики плазмы.

Рассмотренные выше решения применимы, если скин-новое время достаточно велико. Соответствующее условие имеет вид

$$\tau = \frac{4\pi\sigma a_\perp^2}{c^2} \gg \tau_A, \quad (11.28)$$

где  $a_\perp$  — поперечный размер сгустка или струи. В обратном случае электрическое поле становится потенциальным и распространение поляризации в фоновую плазму имеет диффузионный характер с коэффициентом диффузии  $D \sim c_A^2 \tau_s$ .

## Глава 12. РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Под равновесием плазмы будем понимать такое ее состояние, когда скорости течений в ней малы по сравнению со скоростью звука или с альфвеновской скоростью. В этом случае можно пренебречь инерцией в уравнении суммарного баланса сил (10.2) по сравнению с градиентом давления:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\vec{j} \cdot \vec{B}]. \quad (12.1)$$

Это уравнение называется уравнением равновесия. Оно означает, что градиент суммарного давления уравновешен силой Лоренца, возникающей при взаимодействии самосогласованных токов и магнитных полей в плазме. Уравнение равновесия (12.1) следует дополнить двумя уравнениями Максвелла:

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} [\nabla \cdot \vec{B}], \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (12.2)$$

С учетом уравнений Максвелла уравнение равновесия может быть записано в виде

$$\nabla p = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \nabla) \vec{B}. \quad (12.3)$$

Первый член в правой части можно интерпретировать как градиент магнитного давления, а второй член — как «натяжение» магнитных силовых линий, он вызван кривизной магнитного поля. Уравнения (12.1)–(12.2) или (12.3) являются исходными для анализа проблемы равновесия. Подчеркнем еще раз, что в равновесии в плазме остаются различные течения, связанные и не связанные со столкновениями.

### 12.1. О НЕВОЗМОЖНОСТИ РАВНОВЕСИЯ БЕЗ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Покажем, что равновесие только за счет внутренних токов, протекающих по плазме, т. е. в отсутствие внешнего магнитного поля, создаваемого токами в обмотках, невозможно. Предположим обратное, то есть будем считать уравнение (12.3) выполненным. Введем тензор магнитных натяжений:

$$\pi_{ik} = p\delta_{ik} + \frac{B^2}{8\pi}\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}B_iB_k. \quad (12.4)$$

С учетом условия  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  уравнение (12.3) преобразуем к виду

$$\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (12.5)$$

Преобразуем следующий интеграл по бесконечному объему, который включает и плазму, и область вне плазмы:

$$\int x_i \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint x_i \pi_{ik} dS_k - \int \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \pi_{ik} dV. \quad (12.6)$$

Согласно (12.5) левая часть этого соотношения обращается в ноль. Поэтому так как  $\partial x_i / \partial x_k = \delta_{ik}$ , имеем

$$\int \pi_{ii} dV = \oint x_i \pi_{ik} dS_k. \quad (12.7)$$

После подстановки выражения для  $\pi_{ik}$  (12.4) получаем

$$\int \left(3p + \frac{B^2}{8\pi}\right) dV = \oint \left[ \left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right) \vec{r} - \frac{(\vec{r}\vec{B})\vec{B}}{4\pi} \right] d\vec{S}. \quad (12.8)$$

Левая часть этого равенства является конечной и положительной величиной. В правой части интегрирование ведется по площади, ограничивающей бесконечный объем. Давление плазмы на этой поверхности равно нулю. Если магнитное поле создается токами по плазме, то на бесконечности магнитное поле спадает как  $r^{-3}$  (дипольный характер) или быстрее. Поэтому поверхностный интеграл в правой части (12.8) обращается в ноль. Таким образом, равенство (12.8) не может быть выполнено, а следовательно, предположение о том, что уравнения (12.3), (12.5)

справедливы, не соответствует действительности. Таким образом, для удержания плазмы в магнитном поле необходимо магнитное поле, создаваемое внешними токами, взаимодействие между которыми компенсируется механическими силами внешнего источника тока.

## 12.2. РАВНОВЕСИЕ ПИНЧА

Рассмотрим бесконечный плазменный шнур, помещенный в магнитное поле, направленное вдоль оси шнура. Вдоль оси шнура может также протекать ток, который создает азимутальное магнитное поле. Такой шнур назовем пинчем. Все параметры плазмы в пинче не зависят от продольной координаты  $z$  и азимутального угла  $\theta$  и являются только функциями радиуса  $r$ . Уравнение Максвелла  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  из-за отсутствия зависимости от  $z$  и  $\theta$  в цилиндрических координатах сводится к соотношению  $r^{-1}d(rB_r/dr)$ , откуда  $B_r r = \text{const}$ . Из ограниченности в нуле следует, что радиальное магнитное поле в пинче отсутствует:  $B_r = 0$ . Таким образом, в пинче имеются продольные и азимутальные магнитные поля, которые создаются, соответственно, азимутальным и продольными токами. Из уравнения Максвелла  $[\nabla \cdot \vec{B}] = (4\pi/c)\vec{j}$  имеем

$$j_\theta = -\frac{c}{4\pi} \frac{dB_z}{dr}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{d(rB_\theta)}{dr}. \quad (12.9)$$

Здесь использовано общее соотношение:

$$(\nabla \cdot \vec{A})_i = \frac{e_{ijk}}{h_j h_k} \frac{\partial (A_k h_k)}{\partial x_j}.$$

Величина  $e_{ijk}$  — абсолютно антисимметричный тензор, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов и равны  $\pm 1$  в случае всех различных индексов и нулю для совпадающих индексов. Коэффициенты Ламе для цилиндрических координат  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_z = 1$ . Уравнение равновесия для пинча сводится к виду

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{c} (j_\theta B_z - j_z B_\theta). \quad (12.10)$$

Подставляя плотность тока из (12.9), получаем

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{8\pi} \frac{dB_z^2}{dr} + \frac{B_0}{4\pi r} \frac{d(rB_0)}{dr} = 0. \quad (12.11)$$

Используя соотношение между азимутальным магнитным полем и током, протекающим внутри данного радиуса,

$$B_0 = \frac{2I(r)}{cr}, \quad I(r) = \int_0^r j_z 2\pi r dr,$$

уравнение равновесия (12.11) можно записать в виде

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{8\pi} \frac{dB_z^2}{dr} + \frac{1}{2\pi c^2 r^2} \frac{dI^2}{dr} = 0. \quad (12.12)$$

Таким образом, уравнения (12.11) или (12.12) полностью описывают равновесие плазменного шнура в магнитном поле.

Рассмотрим частные случаи равновесия. Плазменный шнур, в котором отсутствует продольный ток, называется тэта-пинчем. В нем  $j_z = 0$  и  $B_0 = 0$ , а уравнение равновесия, после интегрирования по радиусу, сводится к условию

$$p + \frac{B_z^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi}, \quad (12.13)$$

где  $B_0$  — продольное магнитное поле вне плазменного шнура. Это равенство может быть выполнено, если параметр

$$\beta = \frac{8\pi p}{B_0^2} < 1. \quad (12.14)$$

В противном случае равновесие невозможно, так как давление плазмы не может быть уравновешено силой Лоренца, а плазменный шнур разлетается со скоростью порядка скорости звука, как в отсутствие магнитного поля (см. главу 9). При выполнении же условия (12.14) равновесие устанавливается автоматически за счет возникновения азимутального диамагнитного тока, возникающего в неоднородной плазме за счет ларморовского вращения частиц в магнитном поле. Диамагнитный ток уменьшает магнитное поле внутри плазменного шнура, так что уравнение (12.14) оказывается выполненным.

В отличие от тэта-пинча в зет-пинче продольное магнитное поле отсутствует  $B_z = 0$ , а следовательно, отсутствует и диамагнитный ток  $j_\theta = 0$ . Давление плазмы уравновешивается силой Лоренца, вызванной взаимодействием продольного тока с создаваемым им магнитным полем. Согласно (2.12)

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{1}{2\pi c^2 r^2} \frac{dI^2}{dr}. \quad (12.15)$$

Умножим обе части (12.15) на  $\pi r^2$  и проинтегрируем от нуля до радиуса шнура  $a$ . В левой части выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^a \pi r^2 \frac{dp}{dr} dr = - \int_0^a 2\pi r p dr.$$

В результате получим интегральное условие равновесия:

$$\frac{I^2(a)}{2c^2} = \int_0^a 2\pi r p dr = \langle p \rangle \pi a^2, \quad (12.16)$$

которое связывает полный ток в шнуре со средним давлением плазмы. Таким образом, чтобы удержать плазменный шнур в отсутствие внешнего магнитного поля, по нему необходимо пропустить ток в соответствии с уравнением (12.15) или (12.16).

### 12.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В установках для удержания плазмы в магнитном поле ключевым является понятие магнитной поверхности. Мы будем рассматривать систему вложенных тороидальных магнитных поверхностей. Силовая линия, лежащая на такой поверхности, либо замыкается сама на себя, либо эргодически заполняет всю магнитную поверхность. В последнем случае силовая линия проходит сколь угодно близко к любой заданной точке магнитной поверхности. Магнитные же поверхности, на которых силовая линия замкнута, являются выделенными и называются резонансными поверхностями. В установках токамак имеет

место тороидальная симметрия, то есть все величины не зависят от тороидального угла. Пример типичных магнитных поверхностей в токамаке приведен на рис. 12.1.

На краю плазмы силовые линии становятся незамкнутыми и выходят на материальные поверхности; линия, которая разделяет области с разной топологией магнитного поля, называется сепаратрисой. Внутри сепаратрисы вложенные одна в другую магнитные поверхности охватывают силовую линию, которая называется магнитной осью. Кроме тороидально симметричных конфигураций существуют еще и более сложные магнитные ловушки, — например, стеллараторы, обладающие винтовой симметрией. Винтовой симметрией обладают и магнитные острова в токамаке, которые могут возникать вблизи рациональных магнитных поверхностей; эти явления будут рассмотрены позже. Пока же мы ограничимся рассмотрением тороидально симметричных вложенных друг в друга магнитных поверхностей.

Для описания равновесия в такой ситуации удобно использовать так называемые поверхностные величины,

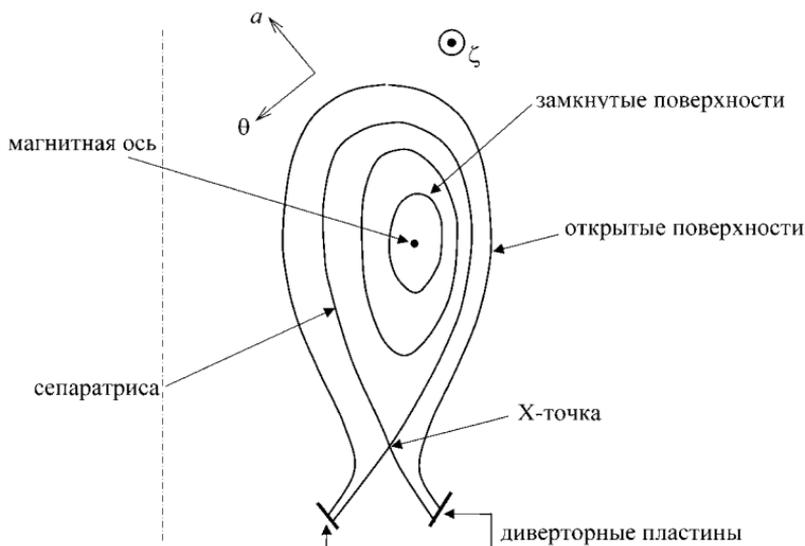


Рис. 12.1

Сечение магнитных поверхностей токамака, соответствующее фиксированному тороидальному углу

которые являются функцией только магнитной поверхности. Первой поверхностной величиной является тороидальный магнитный поток  $\Psi_T$  через сечение тора:

$$\Psi_T = \int_{S_T} \vec{B} d\vec{S}, \quad (12.17)$$

где интегрирование проводится по тороидальной площадке (рис. 12.2). Другими словами, величина  $\Psi_T$  представляет собой поток тороидального магнитного поля через тороидальное сечение магнитной поверхности. Согласно уравнению  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  и теореме Гаусса поток магнитного поля через замкнутую магнитную поверхность равен нулю. Поэтому поток через одно тороидальное сечение равен потоку через другое тороидальное сечение, так как вместе с магнитной поверхностью они образуют замкнутую поверхность, а поток через магнитную поверхность равен нулю, так как отсутствует компонент магнитного поля, нормальный к магнитной поверхности по определению последней.

Полоидальный поток представляет собой поток магнитного поля через поверхность, натянутую внутри тора, в «дырке от бублика» (рис. 12.2):

$$\Psi_p = \int_{S_p} \vec{B} d\vec{S}. \quad (12.18)$$

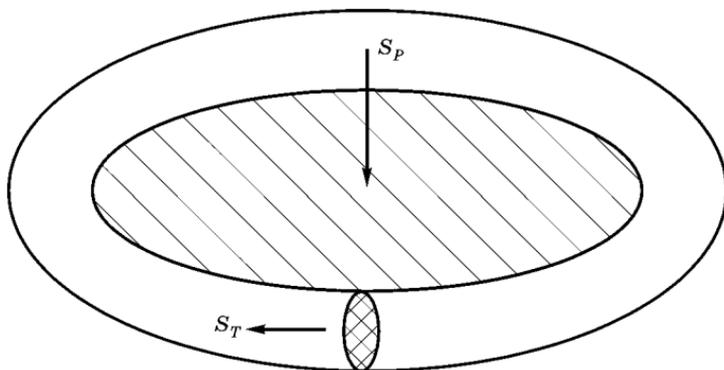


Рис. 12.2  
Тороидальное и полоидальное сечения тора

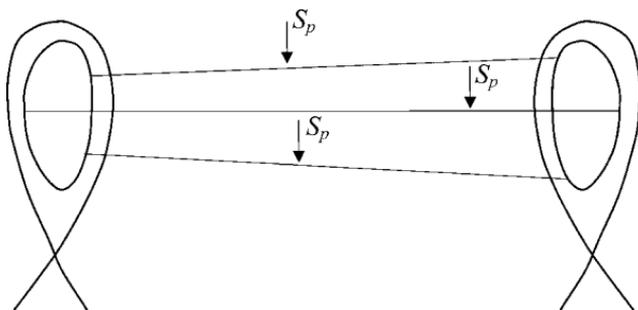


Рис. 12.3

Различные варианты выбора полоидальных поверхностей

На рис. 12.3 приведены различные варианты выбора полоидальных поверхностей. Поток магнитного поля через каждое из таких сечений одинаков, так как два сечения вместе с соответствующими частями магнитной поверхности образуют замкнутую поверхность, а поток через части магнитных поверхностей отсутствует. Таким образом, полоидальный поток также является поверхностной величиной.

Поверхностной величиной является и полное давление плазмы  $p$ . Так как мы пренебрегаем инерциальными членами, то  $\vec{B}\nabla p = 0$ , т. е. давление должно быть выровнено вдоль силовой линии, а следовательно, должно быть постоянным на всей магнитной поверхности.

Из уравнения равновесия (12.1)  $\nabla p = [\vec{j} \cdot \vec{B}]/c$  следует, что так как  $\nabla p$  направлен по нормали к магнитной поверхности, то отсутствует компонент тока, нормальный к магнитной поверхности (это утверждение перестает быть справедливым при учете вязкости). В пренебрежении же диссипативными процессами и инерцией линии тока, как и силовые линии магнитного поля, лежат на магнитной поверхности. Так как для плотности тока выполнено уравнение непрерывности  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , то, как и для магнитного поля, ток через замкнутую поверхность равен нулю. Поэтому, учитывая, что ток через части магнитной поверхности отсутствует, можно, аналогично магнитному полю, ввести еще две поверхностные величины:

$$I_T = \int_{S_T} \vec{j} d\vec{S} \quad (12.19)$$

— полный тороидальный ток внутри данной магнитной поверхности, и

$$I_p = \int_{S_p} \vec{j} d\vec{S} \quad (12.20)$$

— полный полоидальный ток через полоидальное сечение.

На магнитной поверхности определена величина  $q$ , которая называется запасом устойчивости. Для замкнутой силовой линии величина  $q$  равна отношению числа оборотов  $n$  вдоль окружности большого радиуса (большому обходу) к числу оборотов  $m$  вдоль окружности малого радиуса (малому обходу) до замыкания:  $q = n/m$ . Для эргодической силовой линии следует брать предел отношения при бесконечном числе обходов:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m}. \quad (12.21)$$

По самому определению  $q$  является поверхностной величиной. Покажем, что запас устойчивости также может

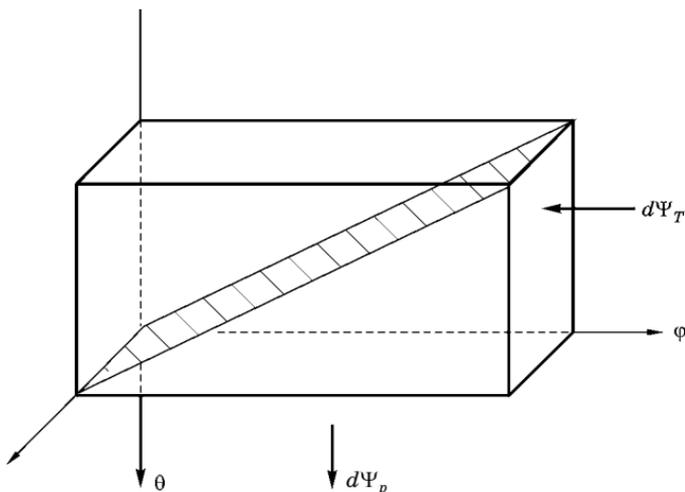


Рис. 12.4

Тороидальный и полоидальный потоки между двумя соседними магнитными поверхностями. Здесь  $\phi$  — тороидальный угол,  $\theta$  — полоидальный угол, третья координата соответствует нормали к магнитной поверхности.

быть выражен как производная тороидального потока по полоидальному:

$$q = -\frac{d\Psi_T}{d\Psi_p}. \quad (12.22)$$

Для доказательства рассмотрим сначала частный случай  $q = 1$ . Рассмотрим область между двумя магнитными поверхностями, которые развернем в плоскости (рис. 12.4). Тороидальный  $\varphi$  и полоидальный  $\theta$  углы изменяются в диапазоне  $(0, 2\pi)$ , так что левый и правый торцы параллелепипеда склеены между собой. Третья координата направлена по нормали к магнитной поверхности. Так как после одного обхода по полоидальному и тороидальному углу силовая линия замыкается сама на себя, то она должна лежать на перемычке (не обязательно плоской), заштрихованной на рис. 12.4. Поток магнитного поля через эту перемычку отсутствует, так же как и через ближнюю и дальнюю часть магнитных поверхностей. Поэтому, рассматривая объем, ограниченный перемычкой, передней и задней частями магнитной поверхности, нижней и правой торцевой гранями, мы заключаем, что поток через нижнюю грань равен потоку через правую торцевую грань, то есть  $d\Psi_T = -d\Psi_p$ . Знак «минус» учитывает тот факт, что при переходе к более внешним магнитным поверхностям тороидальный магнитный поток растет, а полоидальный — падает. Таким образом, для  $q = 1$  соотношение (12.22) выполнено. В случае  $q = n/m$  тороидальный поток через торцевую грань возрастает в  $n$  раз, что соответствует числу пересечений силовой линии до замыкания, а через нижнюю грань — в  $m$  раз, соответственно (12.22) остается справедливым. И, наконец, в пределе для эргодической силовой линии по-прежнему выполнено соотношение (12.22).

#### 12.4. УРАВНЕНИЕ ГРЭДА — ШАФРАНОВА

Форма произвольных магнитных поверхностей для случая тороидальной симметрии описывается уравнением равновесия, в котором фигурируют только поверхностные величины. Рассмотрение проведем

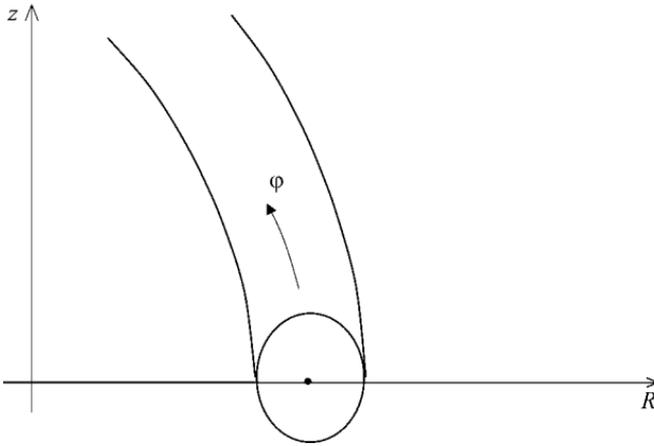


Рис. 12.5

Цилиндрическая система координат:

 $R$  — большой радиус;  $\varphi$  — тороидальный угол.

в цилиндрической системе координат,  $(R, \varphi, z)$  изображенной на рис. 12.5. Координата  $R$  представляет собой большой радиус, а  $\varphi$  — тороидальный угол, от которого не зависят никакие величины. Точка на магнитной поверхности описывается, таким образом, парой координат  $(R, z)$ . Магнитное поле представляет собой сумму полоидального  $\vec{B}_p$  и тороидального  $\vec{B}_T$  магнитных полей:  $\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_T$ . Полоидальное магнитное поле, в свою очередь, имеет два компонента:  $\vec{B}_p = \vec{B}_z + \vec{B}_R$ . Полоидальный магнитный поток  $\Psi_p$  по определению равен

$$\Psi_p = - \int_0^R 2\pi R' B_z dR', \quad (12.23)$$

откуда следует соотношение

$$B_z = - \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi_p}{\partial R}. \quad (12.24)$$

Интегрируя уравнение  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_R) = 0, \quad (12.25)$$

выразим и радиальную проекцию магнитного поля через полоидальный поток:

$$B_R = -\frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial B_z}{\partial z} R' dR' = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}. \quad (12.26)$$

Полоидальный ток  $I_p$  запишем в виде

$$I_p = - \int_0^R 2\pi R' j_z dR'. \quad (12.27)$$

Дифференцируя по верхнему пределу, имеем, аналогично (12.24):

$$j_z = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial I_p}{\partial R}. \quad (12.28)$$

Так как  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , то как и для магнитного поля, имеем связь, аналогичную (12.26):

$$j_R = -\frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial j_z}{\partial z} R' dR' = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial I_p}{\partial z}. \quad (12.29)$$

Тороидальное магнитное поле выразим через полоидальный ток из интегрального уравнения Максвелла при обходе по контуру в тороидальном направлении:

$$B_\varphi = -\frac{2I_p}{cR}. \quad (12.30)$$

Для тороидальной плотности тока имеем

$$\begin{aligned} j_\varphi &= \frac{c}{4\pi} [\nabla \cdot \vec{B}]_\varphi = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) = \\ &= \frac{c}{8\pi^2 R} \left[ \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_p}{\partial R} \right) \right] = \frac{c}{8\pi^2 R} \Delta^* \Psi_p. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Здесь оператор  $\Delta^*$  напоминает оператор Лапласа:

$$\Delta^* = \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \right].$$

Запишем теперь радиальную компоненту уравнения равновесия:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{1}{c} (j_\varphi B_z - j_z B_\varphi). \quad (12.32)$$

Подставим в правую часть компоненты магнитных полей и плотностей токов: (12.24), (12.28), (12.30) и (12.31), а левую часть преобразуем согласно  $\partial p / \partial R = (dp/d\Psi_p)(\partial\Psi_p/\partial R)$ . Сокращая обе части на величину  $\partial\Psi_p/\partial R$ , получаем

$$\Delta^*\Psi_p = -16\pi^3 R^2 \frac{dp}{d\Psi_p} - \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{dI_p^2}{d\Psi_p}. \quad (12.33)$$

Это уравнение известно как уравнение Грэда — Шафранова. Решением его является функция  $\Psi_p(R, z)$ , а условие  $\Psi_p(R, z) = \text{const}$  определяет уравнение, связывающее координаты точек данной магнитной поверхности. Решить уравнение Грэда — Шафранова можно, если заданы функции  $p(\Psi_p)$  и  $I_p(\Psi_p)$ , которые и определяют форму магнитных поверхностей. Последние подбираются, чтобы получилось желаемое равновесие. Вне плазменного шнура уравнение Грэда — Шафранова имеет вид

$$\Delta^*\Psi_p = 0. \quad (12.34)$$

На границе плазменного шнура решение уравнения (12.33)  $\Psi_{pi}$  и решение уравнения (12.34)  $\Psi_{pe}$  должны быть сшиты вместе с производными по нормали:

$$\Psi_{pi} \Big|_s = \Psi_{pe} \Big|_s, \quad \frac{\partial\Psi_{pi}}{\partial n} \Big|_s = \frac{\partial\Psi_{pe}}{\partial n} \Big|_s. \quad (12.35)$$

Величину полоидального магнитного потока удобно отсчитывать от магнитной оси. При этом вводят величину

$$\Psi = \Psi_p^0 - \Psi_p, \quad (12.36)$$

где  $\Psi_p^0$  — полоидальный поток, соответствующий магнитной оси. Величина  $\Psi$  обращается в ноль на магнитной оси и нарастает к сепаратрисе. Для нее также выполняется уравнение Грэда — Шафранова.

Приведем простой пример расчета равновесия. Положим  $dp/d\Psi = \text{const}$  и  $dI^2/d\Psi = \text{const}$ , причем константы выберем следующим образом:

$$16\pi^3 \frac{dp}{d\Psi} = -\frac{a\Psi_0}{R_0^4}, \quad \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{dI^2}{d\Psi} = -\frac{b\Psi_0}{R_0^2}.$$

Тогда простое решение уравнения равновесия имеет вид

$$R_0^4 \frac{\Psi}{\Psi_0} = \frac{1}{2}(bR_0^2 + R^2)z^2 + \frac{a-1}{8}(R^2 - R_0^2)^2.$$

В точке  $R = R_0$  и  $z = 0$  полоидальный поток  $\Psi = 0$ , эта точка соответствует положению магнитной оси. Вблизи магнитной оси при  $R \approx R_0$  получаем

$$\frac{\Psi}{\Psi_0} = \frac{1}{2}(b+1)\frac{z^2}{R_0^2} + \frac{(a-1)(R-R_0)^2}{2R_0^2}. \quad (12.37)$$

Таким образом, магнитные поверхности в этом примере имеют форму эллипсов, охватывающих магнитную ось, полуоси которых определяются величинами  $a$  и  $b$ .

### 12.5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

Чтобы лучше понять, как осуществляется равновесие в токамаке, рассмотрим токамак с круглым сечением. Пусть последняя замкнутая магнитная поверхность имеет радиус  $a$ . Ограничимся случаем большого аспектного отношения, когда

$$\frac{a}{R} \ll 1, \quad (12.38)$$

где  $R$  — большой радиус шнура, например, соответствующий центру последней замкнутой магнитной поверхности. При условии (12.38) в нулевом приближении тор можно рассматривать как цилиндр, а тороидальные эффекты — как малые поправки. С такой точностью можно не делать различия между большим радиусом центра шнура или большим радиусом какой-либо точки магнитной поверхности.

Проанализируем силы, действующие на плазменный шнур в целом. В нулевом (цилиндрическом) приближении все силы действуют в направлении малого радиуса плазмы, это так называемое «равновесие по малому радиусу». В этом приближении выполнено рассмотренное ранее уравнение равновесия (12.11) или (12.12). Интегрируя (12.12) с весом  $r^2$  по всему шнуру радиуса  $a$  и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\langle p \rangle = \frac{B_{\text{эф}}^2}{8\pi} - \left\langle \frac{B_{i\varphi}^2}{8\pi} \right\rangle + \frac{I_T^2(a)}{2\pi c^2 a^2}. \quad (12.39)$$

Здесь

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r p dr, \quad \left\langle \frac{B_{i\varphi}^2}{8\pi} \right\rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r p \frac{B_{i\varphi}^2}{8\pi} dr, \quad (12.40)$$

где поле  $B_{i\varphi}$  — это тороидальное магнитное поле внутри плазменного шнура, которое соответствует полю  $B_z$  в цилиндре; поле  $B_{\text{эф}}$  — тороидальное магнитное поле в вакууме (соответствует полю  $B_0$  в (12.12));  $I_T$  — полный тороидальный ток.

Уравнение (12.39) представляет собой интегральное условие равновесия по малому радиусу.

В силу того, что в торе элемент площади на внешней стороне больше, чем на внутренней, в нем, в отличие от цилиндра, возникают силы в направлении большого радиуса. Эти силы содержат малый параметр  $a/R$ . Интегральный баланс этих сил называется равновесием по большому радиусу. Чтобы найти эти силы, рассмотрим виртуальные перемещения шнура в направлении большого радиуса и вычислим совершаемую работу  $A$  и потенциальную энергию  $W = -A$ , запасенную в шнуре. Тогда сила, действующая в направлении большого радиуса, есть  $F = -\partial W / \partial R$ .

Потенциальная энергия шнура и сила в направлении внешнего обвода связаны с тремя различными факторами:

$$W = W_p + W_I + W_B. \quad (12.41)$$

Первая часть потенциальной энергии  $W_p$  связана с полным давлением плазмы и различием во внутреннем и внешнем обводах тора. При перемещении плазменного шнура в направлении внешнего обвода происходит его расширение и совершается работа. Соответствующая потенциальная энергия:

$$W_p = - \int p dV = -2\pi^2 a^2 R \langle p \rangle, \quad (12.42)$$

а сила:

$$F_p = - \frac{\partial W_p}{\partial R} = 2\pi^2 a^2 \langle p \rangle. \quad (12.43)$$

Вторая сила связана с взаимодействием токов, текущих по шнуру в тороидальном направлении, или, другими словами, с взаимодействием тороидального тока с полоидальным магнитным полем:  $j_\varphi B_p$ . Потенциальная энергия взаимодействия токов:

$$W_I = \frac{LI_T^2(a)}{2c^2}, \quad (12.44)$$

где  $L$  — индуктивность плазменного шнура. Величина индуктивности для тора с распределенным током известна и равна

$$L = 4\pi R[\ln(8R/a) - 2 + l_i/2], \quad l_i = \langle B_p^2 \rangle / B_p^2(a). \quad (12.45)$$

Здесь  $B_p(a)$  — полоидальное магнитное поле на границе плазменного шнура, а среднее определено так же, как в (12.40). Сместим шнур по большому радиусу, при этом магнитный поток  $\Psi(a) = I_T L/c$  должен сохраниться, а тороидальный ток — измениться. Потенциальную энергию удобно переписать в виде

$$W_I = \frac{\Psi^2(a)}{2L}. \quad (12.46)$$

Соответствующая сила:

$$F_I = -\frac{\partial W_I}{\partial R} \Big|_{\Psi=\text{const}} = \frac{2\pi I_T^2}{c^2} \left( \ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{l_i}{2} \right). \quad (12.47)$$

Третья сила связана с взаимодействием полоидального тока и тороидального магнитного поля  $j_p B_\varphi$ . Соответствующая потенциальная энергия:

$$W_B = \int_{V_i} \frac{B_{i\varphi}^2}{8\pi} dV + \int_{V_e} \frac{B_{e\varphi}^2}{8\pi} dV. \quad (12.48)$$

Здесь интегралы берутся по объему шнура и области вне шнура соответственно. Перепишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} W_B &= \int_{V_e+V_i} \frac{B_{e\varphi}^2}{8\pi} dV + \int_{V_i} \left( \frac{B_{i\varphi}^2}{8\pi} - \frac{B_{e\varphi}^2}{8\pi} \right) dV = \\ &= \text{const} + 2\pi^2 a^2 R \left\langle \frac{B_{i\varphi}^2}{8\pi} - \frac{B_{e\varphi}^2}{8\pi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (12.49)$$

Первое слагаемое здесь представляет собой интеграл от давления вакуумного магнитного поля по всему объему и поэтому является константой. Второй же интеграл линейно зависит от большого радиуса. Сила в направлении большого радиуса равна

$$F_B = -\frac{\partial W_B}{\partial R} = 2\pi^2 a^2 \left[ \frac{B_{e\phi}^2}{8\pi} - \left\langle \frac{B_{i\phi}^2}{8\pi} \right\rangle \right]. \quad (12.50)$$

Преобразуем правую часть (12.50), используя условие равновесия по малому радиусу (12.39):

$$F_B = 2\pi^2 a^2 \langle p \rangle - \frac{\pi I_T^2}{c^2}. \quad (12.51)$$

Сложим теперь все три силы (12.43), (12.47) и (12.51):

$$\begin{aligned} F_R &= F_p + F_I + F_B = \\ &= \frac{2\pi I_T^2}{c^2} \left[ \ln \left( \frac{8R}{a} \right) - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2} + \frac{2\pi c^2 a^2 \langle p \rangle}{I_T^2} \right]. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Сила  $F_R$  выталкивает плазменный шнур в направлении внешнего обвода. Чтобы удержать плазму в равновесии, необходимо приложить к шнуру дополнительную встречную силу  $F_R^* = -F_R$ . Чтобы создать такую силу, удерживающую плазменный шнур, в плазме создают вертикальное магнитное поле  $B_V$  за счет пропуска тока в специальных обмотках. В результате взаимодействия вертикального поля с тороидальным током, текущим по плазме, появляется сила

$$F_R^* = -\frac{1}{c} \int j_\phi B_V dV = -\frac{2\pi R}{c} I_T B_V. \quad (12.53)$$

Величина вертикального поля находится из условия  $F_R^* = -F_R$ :

$$B_V = \frac{I_T}{cR} \left[ \ln \left( \frac{8R}{a} \right) - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2} + \frac{2\pi c^2 a^2 \langle p \rangle}{I_T^2} \right]. \quad (12.54)$$

Последнее слагаемое в скобках известно как «бета токовое»:

$$\beta_I = \frac{2\pi c^2 a^2 \langle p \rangle}{I_T^2} = \frac{8\pi \langle p \rangle}{B_p^2(a)} \quad (12.55)$$

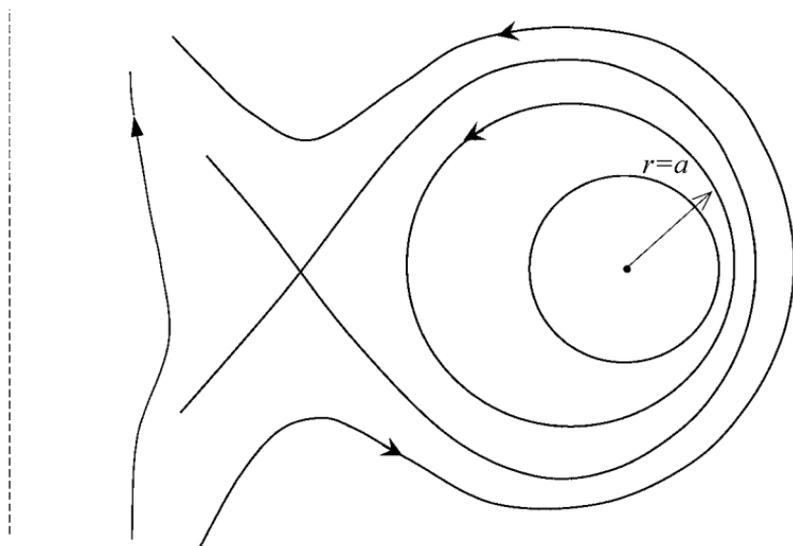


Рис. 12.6

Формирование  $X$ -точки на внутреннем обводе токамака при росте  $\beta_I$ . Стрелками показано направление полоидального магнитного поля в разных областях.

и представляет собой отношение среднего давления плазмы к давлению полоидального магнитного поля.

Равновесие плазменного шнура возможно не при любом значении  $\beta_I$ . Действительно, из-за того, что вертикальное управляющее магнитное поле складывается с полоидальным магнитным полем, создаваемым тороидальным током, на внутреннем обводе суммарное полоидальное магнитное поле обращается в ноль (рис. 12.6). Точка, в которой это происходит, называется  $X$ -точкой, а линия, на которой находится  $X$ -точка, называется сепаратрисой. Сепаратриса разделяет области с различной топологией магнитного поля. При небольших значениях  $\beta_I$  вертикальное поле мало и  $X$ -точка находится вне плазменного шнура, где спадающее как  $r^{-1}$  полоидальное поле тока сравнивается с вертикальным полем. С увеличением значения  $\beta_I$   $X$ -точка сдвигается в направлении плазменного шнура и равновесие становится невозможным, так как плазма начинает уходить вдоль силовых линий магнитного поля. Максимально возможному значению  $\beta_I^{\max}$  соответствует условие

$$B_V = \frac{2I_T}{ca}. \quad (12.56)$$

Отсюда следует

$$\beta_I^{\max} = \frac{2R}{a} - \ln\left(\frac{8R}{a}\right) + \frac{3}{2} - \frac{l_i}{2}. \quad (12.57)$$

Это значение  $\beta_I^{\max}$  соответствует предельному по равновесию значению  $\beta_I$  для токамаков круглого сечения. При изменении формы сечения, например при увеличении вытянутости, значение  $\beta_I^{\max}$  может оказаться больше, чем значение, которое дается выражением (12.57).

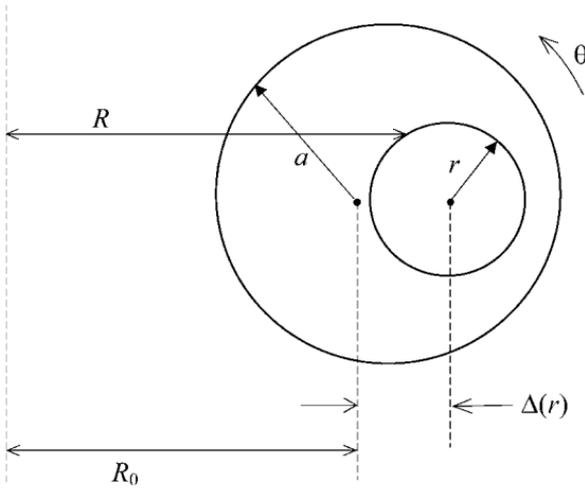
## 12.6. РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ С МАГНИТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, БЛИЗКИМИ К КРУГОВЫМ

Проанализируем теперь форму магнитных поверхностей в токамаке, если сечение близко к круговому. Будем искать равновесие, в котором магнитные поверхности представляют собой систему вложенных окружностей, центры которых смещены относительно центра окружности, соответствующей последней замкнутой магнитной поверхности (рис. 12.7). Будем обозначать большой радиус центра последней замкнутой магнитной поверхности —  $R_0$ , а большой радиус произвольной точки магнитной поверхности —  $R$ . Величина  $r$  — радиус магнитной поверхности, отсчитываемый от ее центра, для последней замкнутой магнитной поверхности  $r = a$ . Смещение центра данной магнитной поверхности относительно центра последней замкнутой магнитной поверхности обозначим  $\Delta(r)$ , эта величина уменьшается с ростом  $r$ , причем  $\Delta(a) = 0$ . Величину  $\Delta(r)$  называют шафрановским сдвигом. По-прежнему используем приближение малой тороидальности:

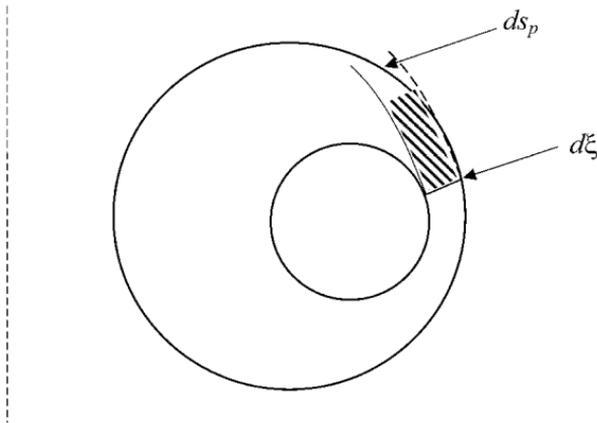
$$\varepsilon = \frac{r}{R_0} \ll 1. \quad (12.58)$$

Тороидальное магнитное поле в токамаке обратно пропорционально большому радиусу:

$$B_T = \frac{B_T^0 R_0}{R}. \quad (12.59)$$



**Рис. 12.7**  
Шафрановское смещение круговых магнитных поверхностей



**Рис. 12.8**  
Элемент площади между двумя близкими магнитными поверхностями

Здесь  $B_T^0$  — тороидальное поле в центре последней замкнутой магнитной поверхности. Используя геометрическое соотношение  $R = R_0 + r \cos \theta$ , запишем (12.59) в виде

$$B_T = \frac{B_T^0}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} \approx B_T^0 (1 - \varepsilon \cos \theta). \quad (12.60)$$

Полоидальное магнитное поле будем искать в аналогичном виде:

$$B_p = B_p^0(1 - \varepsilon\Lambda(r)\cos\theta). \quad (12.61)$$

Величину  $\Lambda(r)$ , как и  $\Delta(r)$ , предстоит найти из уравнения равновесия. Эти функции не являются независимыми. Чтобы найти связь между ними, рассмотрим две соседние магнитные поверхности. Пусть  $d\xi$  — расстояние по нормали между ними (см. рис. 12.8). Величина  $d\xi$  зависит от полоидального угла и шафрановского сдвига:

$$d\xi = dr + \cos\theta d\Delta = (1 + \cos\theta \frac{d\Delta}{dr})dr. \quad (12.62)$$

Элемент площади  $dS_p$  между соседними магнитными поверхностями, через который проходит полоидальный поток, равен

$$\begin{aligned} dS_p &= 2\pi R d\xi = 2\pi R_0(1 + \varepsilon\cos\theta)(1 + \cos\theta \frac{d\Delta}{dr})dr = \\ &= 2\pi R_0[1 + (\varepsilon + \frac{d\Delta}{dr})\cos\theta]dr. \end{aligned} \quad (12.63)$$

Мы пренебрегаем квадратичными по  $\varepsilon$  членами. Полоидальный поток между соседними поверхностями есть

$$\begin{aligned} d\Upsilon_p &= B_p dS_p = B_p^0(1 - \varepsilon\Lambda\cos\theta)2\pi R_0[1 + (\varepsilon + \frac{d\Delta}{dr})\cos\theta]dr \approx \\ &\approx 2\pi R_0 B_p^0 \left[ 1 + (\varepsilon - \varepsilon\Lambda + \frac{d\Delta}{dr})\cos\theta \right]. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Так как полоидальный поток есть поверхностная величина, то приращение  $d\Upsilon_p$  не зависит от полоидального угла. Поэтому, приравнявая нулю коэффициент перед  $\cos\theta$ , получаем соотношение

$$\frac{d\Delta}{dr} = \varepsilon(\Lambda - 1). \quad (12.65)$$

Спроектируем теперь уравнение равновесия в форме (12.3) на направление по нормали к магнитной поверхности:

$$(1 - \frac{d\Delta}{dr}\cos\theta) \frac{d}{dr} (p + \frac{B^2}{8\pi}) = \frac{\vec{h}(\vec{E}\nabla)\vec{B}}{4\pi}. \quad (12.66)$$

Здесь  $\vec{h}$  — единичный вектор, нормальный к магнитной поверхности, а при вычислении производной по нормали использовано соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial r} \left( 1 - \frac{d\Delta}{dr} \cos\theta \right),$$

которое следует из (12.62). Разобьем оператор в правой части на четыре слагаемых:

$$(\vec{B}\nabla)\vec{B} = (\vec{B}_T\nabla)\vec{B}_T + (\vec{B}_p\nabla)\vec{B}_T + (\vec{B}_T\nabla)\vec{B}_p + (\vec{B}_p\nabla)\vec{B}_p. \quad (12.67)$$

Первое слагаемое в правой части, в соответствии с определением радиуса кривизны плоской кривой, представляет собой вектор, направленный вдоль большого радиуса:

$$(\vec{B}_T\nabla)\vec{B}_T = -\frac{B_T^2}{R^2} \vec{R}, \quad \vec{h}(\vec{B}_T\nabla)\vec{B}_T = -\frac{B_T^2}{R} \cos\theta. \quad (12.68)$$

Второе слагаемое в правой части (12.67)  $(\vec{B}_p\nabla)\vec{B}_T$  представляет собой вектор в тороидальном направлении и не имеет проекции на нормаль к магнитной поверхности. Третье слагаемое  $(\vec{B}_T\nabla)\vec{B}_p$  представляет собой полоидальный вектор и также не имеет проекции на нормаль к магнитной поверхности. Последний вектор в (12.67) направлен вдоль малого радиуса к центру, так что

$$\vec{h}(\vec{B}_p\nabla)\vec{B}_p = -\frac{B_p^2}{r}. \quad (12.69)$$

С учетом (12.68) и (12.69) преобразуется к виду

$$\left( 1 - \frac{d\Delta}{dr} \cos\theta \right) \frac{d}{dr} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{B_T^2}{R} \cos\theta + \frac{B_p^2}{r} \right). \quad (12.70)$$

Перенесем малые члены порядка  $\varepsilon$ , содержащие  $\cos\theta$ , в правую часть:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{B_p^2}{4\pi r} = -\left( \frac{B_T^2}{4\pi R} + \frac{d\Delta}{dr} \frac{B_p^2}{4\pi r} \right) \cos\theta. \quad (12.71)$$

При этом в последнем члене величина  $d(p + B^2/8\pi)/dr$  заменена на  $B_p^2/(4\pi r)$ , что соответствует цилиндрическому (нулевому по параметру  $\varepsilon$ ) приближению. В левой части (12.71) кроме членов нулевого порядка по  $\varepsilon$  присутствуют и члены, пропорциональные  $\varepsilon \cos\theta$ , которые получают

при подстановке тороидального и полоидального магнитного поля в виде (12.60) и (12.61). Таким образом, кроме уравнения равновесия нулевого приближения

$$\frac{d}{dr} \left[ p + \frac{(B^0)^2}{8\pi} \right] + \frac{(B_p^0)^2}{4\pi r} = 0, \quad (12.72)$$

имеет место уравнение первого приближения, которое получается приравниванием к нулю коэффициента при  $\cos\theta$  в (12.71). Используя соотношение (12.65) и уравнение нулевого приближения, имеем

$$\frac{d}{dr} (r(B_p^0)^2 \frac{d\Delta}{dr}) = \frac{8\pi r^2}{R_0} \frac{dp}{dr} - \frac{2r}{R_0} (B_p^0)^2. \quad (12.73)$$

После интегрирования по малому радиусу:

$$\frac{d\Delta}{dr} = \frac{8\pi(p - \bar{p}) - \bar{B}_p^2}{(B_p^0)^2} \frac{r}{R_0}, \quad (12.74)$$

где

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi r' p(r') dr', \quad \bar{B}_p^2 = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi r' (B_p^0)^2 dr'.$$

Величина смещения магнитных поверхностей, как следует из (12.74), зависит от параметра  $\beta_I$  (12.55). Величина  $d\Delta/dr$  отрицательна, так как при спадающем по радиусу давлении  $p < \bar{p}$ . Таким образом, более внутренние магнитные поверхности сильнее смещены наружу, в соответствии с рис. 12.7. Сама величина шафрановского сдвига  $\Delta(r)$  получается интегрированием (12.74). Зная шафрановский сдвиг, нетрудно рассчитать и полоидальное магнитное поле с помощью (12.61) и (12.65).

## 12.7. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Для описания плазмы в магнитных ловушках с произвольными магнитными поверхностями используются специальные системы координат. Удобно ввести так называемые потоковые координаты, характеризующие положение точки на магнитной поверхности:

$$x^i = (a, \theta, \zeta). \quad (12.75)$$

Здесь величина  $a$  является любой поверхностной величиной и нумерует магнитную поверхность. Для круговых магнитных поверхностей в качестве  $a$  может быть выбран малый радиус токамака. Координаты  $\theta$  и  $\zeta$  соответствуют полоидальному и тороидальному углам и меняются в интервале  $0, 2\pi$ . Знаки координат  $\theta$  и  $\zeta$  выбраны так, чтобы для круглых магнитных поверхностей и малой тороидальности они совпадали с направлениями цилиндрических координат пинча  $\theta$  и  $z$  (см. рис. 12.1). Если потоковые координаты известны как функции декартовых координат, то ковариантные и контравариантные базисные векторы определены согласно

$$\bar{e}^i = \nabla x^i, \quad \bar{e}_i = \partial \bar{r} / \partial x^i. \quad (12.76)$$

В этих координатах квадрат элемента длины дается выражением

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (12.77)$$

где метрические коэффициенты  $g_{ik} = \bar{e}_i \bar{e}_k$ . Элемент объема:

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \\ \sqrt{g} = [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2] \bar{e}_3 = ([\nabla x^1 \cdot \nabla x^2] \nabla x^3)^{-1} = \det g_{ik}. \quad (12.78)$$

Дополнительные соотношения:

$$\bar{e}_i \bar{e}^k = \delta_{ik}, \quad \bar{e}_i = \sqrt{g} [\nabla x^{i+1} \cdot \nabla x^{i+2}]. \quad (12.79)$$

Произвольный вектор раскладывается по базисным векторам:

$$\bar{A} = A_i \bar{e}^i = A^i \bar{e}_i; \quad A_i = \bar{A} \bar{e}_i; \quad A^i = \bar{A} \bar{e}^i. \quad (12.80)$$

Покажем, что для силовой линии, лежащей на магнитной поверхности, магнитное поле может быть представлено в виде

$$\bar{B} = \frac{1}{2\pi} [\nabla \Psi_1 \cdot \nabla \zeta] + \frac{1}{2\pi} [\nabla \Psi_2 \cdot \nabla \theta] + \frac{1}{2\pi} [\nabla a \cdot \nabla \eta], \quad (12.81)$$

где  $\Psi_1(a)$  и  $\Psi_2(a)$  — поверхностные величины, а  $\eta(a, \theta, \zeta)$  — периодическая функция  $\theta$  и  $\zeta$ .

Действительно, вектор, не имеющий компоненты вдоль  $\nabla a$ , можно представить в виде

$$\bar{B} = x[\nabla a \cdot \nabla \theta] + y[\nabla a \cdot \nabla \zeta]. \quad (12.82)$$

Из условия  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  следует соотношение

$$\partial x / \partial \zeta - \partial y / \partial \theta = 0. \quad (12.83)$$

Следовательно, величины  $x$  и  $y$  можно выразить через одну периодическую функцию:

$$x = x_0(a) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad y = y_0(a) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}. \quad (12.84)$$

Подставляя это выражение в (12.82), получаем (12.81), если обозначить

$$x_0(a) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi_1}{da}, \quad y_0(a) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi_2}{da}. \quad (12.85)$$

Функция  $\eta(a, \theta, \zeta)$  должна удовлетворять дополнительному условию отсутствия тока, нормального к магнитной поверхности, которое обсуждалось в разделе (12.3):

$$\vec{j} \nabla a = \frac{c}{4\pi} [\nabla \cdot \vec{B}] \nabla a = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot [\vec{B} \cdot \nabla a] = 0. \quad (12.86)$$

Нетрудно убедиться, что величины  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  совпадают с полоидальным и тороидальным магнитными потоками  $\Psi_p$  и  $\Psi_T$  через поверхности, изображенные на рис. 12.2. Для этого необходимо проинтегрировать (12.81) по тороидальной и полоидальной поверхностям. При этом учтем, что

$$\Psi_p = \int_{S_p} \vec{B} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}_p, \quad \Psi_T = \int_{S_T} \vec{B} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}_T, \quad (12.87)$$

где  $l_p, l_T$  — контуры, охватывающие тороидальное и полоидальное сечение соответственно, а  $\vec{A}$  — векторный потенциал.

Действительно, векторный потенциал, соответствующий (12.81), может быть представлен в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{2\pi} \Psi_1 \nabla \zeta + \frac{1}{2\pi} \Psi_2 \nabla \theta - \frac{1}{2\pi} \eta \nabla a + \nabla d, \quad (12.88)$$

где  $d$  — произвольная функция. Подставляя (12.88) в (12.87) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \oint \nabla \theta d\vec{l}_p &= \oint \nabla \zeta d\vec{l}_T = 2\pi, \quad \oint \nabla a d\vec{l}_{p,T} = \oint \nabla \theta d\vec{l}_T = \oint \nabla \zeta d\vec{l}_p = 0, \\ \oint \nabla d d\vec{l}_{p,T} &= 0, \end{aligned} \quad (12.89)$$

получаем  $\Psi_1 = \Psi_p$ ,  $\Psi_2 = \Psi_T$ , так что магнитное поле

$$\vec{B} = \frac{1}{2\pi}[\nabla\Psi_p \cdot \nabla\zeta] + \frac{1}{2\pi}[\nabla\Psi_T \cdot \nabla\theta] + \frac{1}{2\pi}[\nabla a \cdot \nabla\eta]. \quad (12.90)$$

В общем случае угловые координаты можно выбрать специальным образом, так чтобы  $\eta = 0$ . Такие координаты называются потоковыми координатами с выпрямленными силовыми линиями. В них магнитное поле имеет простой вид (эти координаты, вообще говоря, могут быть не ортогональными):

$$\vec{B} = \frac{1}{2\pi}[\nabla\Psi_p \cdot \nabla\zeta] + \frac{1}{2\pi}[\nabla\Psi_T \cdot \nabla\theta]. \quad (12.91)$$

Запишем уравнение силовой линии в этих координатах:

$$\frac{d\theta}{\vec{B}\nabla\theta} = \frac{d\zeta}{\vec{B}\nabla\zeta}. \quad (12.92)$$

Выражая полоидальное  $\vec{B}\nabla\theta$  и тороидальное  $\vec{B}\nabla\zeta$  магнитные поля из (12.91), получаем, что

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{\vec{B}\nabla\zeta}{\vec{B}\nabla\theta} = -\frac{d\Psi_T/da}{d\Psi_p/da} = -\frac{d\Psi_T}{d\Psi_p} = q, \quad (12.93)$$

где запас устойчивости  $q$  определен согласно (12.22). Так как запас устойчивости является поверхностной величиной, то силовая линия в выбранных координатах является прямой.

В токамаке такой выбор ортогональных координат является естественным. Обозначим обратные градиенты:

$$h_a = \frac{1}{|\nabla a|}, \quad h_\theta = \frac{1}{|\nabla\theta|}, \quad h_\zeta = \frac{1}{|\nabla\zeta|}. \quad (12.94)$$

Нетрудно видеть, что  $h_\zeta = R$ , где  $R$  есть текущее значение большого радиуса, так как при интегрировании вдоль тороидального контура  $dl_T$  должно получаться  $2\pi$  (12.89). В соответствии с (12.91) физические компоненты магнитного поля:

$$B_\theta \equiv B_p = -\frac{d\Psi_p/da}{2\pi R h_a}, \quad B_\zeta = B_T = \frac{d\Psi_T/da}{2\pi h_a h_\theta}. \quad (12.95)$$

Величина  $h_\theta$  для круглых магнитных поверхностей переходит в малый радиус  $r$ . В общем же случае величины  $h_a, h_\theta$  могут быть заданы, например, численно, для конкретной формы магнитных поверхностей. Дифференциальные операторы и интегралы при этом определены в соответствии с общими правилами.

Если полоидальный магнитный поток  $\Psi$  отсчитывается от оси согласно (12.36), то

$$\vec{B} = -\frac{1}{2\pi}[\nabla\Psi \cdot \nabla\zeta] + \frac{1}{2\pi}[\nabla\Psi_T \cdot \nabla\theta], \quad (12.96)$$

$$B_\theta \equiv B_p = \frac{d\Psi/da}{2\pi R h_a}, \quad B_\zeta = B_T = \frac{d\Psi_T/da}{2\pi h_a h_\theta}. \quad (12.97)$$

## 12.8. БЕССИЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ И КАНОНИЧЕСКИЕ ПРОФИЛИ В ПИНЧАХ

В ряде случаев, когда магнитное давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля, в плазме могут возникать так называемые бессилловые равновесные конфигурации, когда в уравнении равновесия можно положить  $\nabla p = 0$ . Тогда из уравнения равновесия (12.1) и (12.2) имеем

$$\frac{1}{4\pi}[[\nabla \cdot \vec{B}] \cdot \vec{B}] = 0, \quad (12.98)$$

откуда следует

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu \vec{B}. \quad (12.99)$$

Ниже мы покажем, что величина  $\mu$  не зависит от магнитного поля. У такой бессилловой магнитной конфигурации ток течет вдоль магнитного поля, а плотность тока пропорциональна величине магнитного поля. Бессилловое равновесие реализуется в самых различных конфигурациях, в частности обнаружено, что бессилловое равновесие возникает в пинчах, когда азимутальное и продольное магнитные поля одного порядка.

Равновесие пинча в общем случае описывается уравнениями (12.11) и (12.12), содержащими две произвольные функции  $B_z(r)$  и  $B_\theta(r)$ . Покажем, что дополнительное

условие, связанное с минимизацией энергии магнитного поля при сохранении специфической величины, называемой спиральностью, приводит к равновесию бессилового типа (12.99). Соответствующие профили называются каноническими. Спиральностью называется интеграл по объему, ограниченному замкнутой силовой трубкой:

$$K = \int \vec{A} \vec{B} dV, \quad (12.100)$$

где  $\vec{A}$  — векторный потенциал.

В плазме с бесконечной проводимостью этот интеграл сохраняется, то есть является интегралом движения.

Докажем это утверждение для замкнутой силовой трубки. Для доказательства перепишем

$$K = \int (\vec{A} d\vec{l}) (\vec{B} d\vec{S}), \quad (12.101)$$

где  $S$  — сечение силовой трубки, а  $d\vec{l}$  — элемент длины вдоль силовой линии. Так как магнитный поток  $\vec{B} d\vec{S}$  в трубке сохраняется, то необходимо доказать, что

$$\frac{d}{dt} \int \vec{A} d\vec{l} = 0. \quad (12.102)$$

Преобразуем

$$\frac{d}{dt} \int \vec{A} d\vec{l} = \int \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{A} \right] d\vec{l} + \vec{A} (d\vec{l} \nabla) \vec{V}. \quad (12.103)$$

Здесь использовано соотношение  $d\vec{l}/dt = (\vec{l} \nabla) \vec{V}$ . Из уравнения для магнитного поля (10.14) при  $\sigma \rightarrow \infty$  следует

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + [\vec{V} \cdot \vec{B}] = \nabla \chi, \quad (12.104)$$

где  $\chi$  — произвольная скалярная функция. Подставим (12.104) в (12.103). Учитывая  $[\vec{V} \cdot \vec{B}] d\vec{l} = 0$  и комбинируя оставшиеся члены, найдем

$$\frac{d}{dt} \int \vec{A} d\vec{l} = \int d\vec{l} \nabla (\vec{A} \vec{V} + \chi) = 0. \quad (12.105)$$

Равенство нулю следует из теоремы Стокса и соотношения  $[\nabla \cdot \nabla (\vec{A} \vec{V} + \chi)] = 0$ .

Мы показали, что спиральность сохраняется для замкнутой силовой трубки. При конечной проводимости это

утверждение, вообще говоря, не имеет места, так как силовые линии могут перезамыкаться. Однако при высокой проводимости общая структура магнитных полей меняется не сильно, и приближенно можно считать, что интеграл (12.100) сохраняется при интегрировании по всему объему плазмы. При этом спиральность перераспределяется между трубками, а полная сумма сохраняется.

Найдем конфигурацию магнитного поля, соответствующую минимуму энергии магнитного поля при сохранении спиральности. Для этого необходимо найти минимум функционала:

$$L = \int \frac{B^2}{8\pi} dV - \lambda K, \quad (12.106)$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа. Из условия равенства нулю вариации функционала  $\delta L = 0$  получаем

$$\int \left[ \frac{\vec{B}}{4\pi} \delta[\nabla \cdot \vec{A}] - \lambda \delta(\vec{A}\vec{B}) \right] dV = 0. \quad (12.107)$$

С учетом соотношения

$$\delta(\vec{A}\vec{B}) = \vec{A}\delta[\nabla \cdot \vec{A}] + \vec{B}\delta\vec{A} = \vec{A}[\nabla \cdot \delta\vec{A}] + \vec{B}\delta\vec{A} \quad (12.108)$$

перепишем (12.107):

$$\int \left[ \left( \frac{\vec{B}}{4\pi} - \lambda \vec{A} \right) [\nabla \cdot \delta\vec{A}] - \lambda \vec{B}\delta\vec{A} \right] dV = 0. \quad (12.109)$$

Первый член в подинтегральном выражении преобразуем, используя формулу векторного анализа:

$$\nabla \cdot [\vec{a} \cdot \vec{b}] = -\vec{a}[\nabla \cdot \vec{b}] + \vec{b}[\nabla \cdot \vec{a}].$$

Так как интеграл от дивергенции обращается в ноль, то имеем

$$\int \left[ \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{B}}{4\pi} - \lambda \vec{A} \right) \right] \delta\vec{A} - \lambda \vec{B}\delta\vec{A} \right] dV = 0. \quad (12.110)$$

Так как вариация произвольна, то уравнение Лагранжа:

$$\left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{B}}{4\pi} - \lambda \vec{A} \right) \right] - \lambda \vec{B} = 0, \quad (12.111)$$

или

$$\left[ \nabla \cdot \frac{\vec{B}}{4\pi} \right] = 2\lambda \vec{B}. \quad (12.112)$$

Вводя константу  $\mu = 8\pi\lambda$ , приходим к уравнению (12.99) для бессиловой магнитной конфигурации.

В проекциях уравнение (12.99) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{drB_\theta}{dr} &= \mu B_z, \\ -\frac{dB_z}{dr} &= \mu B_\theta. \end{aligned} \quad (12.113)$$

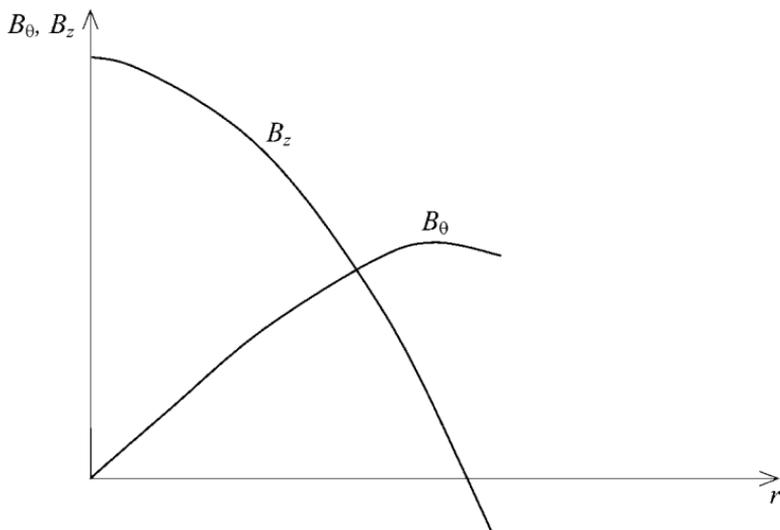
Подставляя в первое уравнение азимутальное поле  $B_\theta$ , из второго уравнения приходим к уравнению Бесселя:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dB_z}{dr} \right) + \mu^2 B_z = 0. \quad (12.114)$$

Таким образом, канонические профили компонент магнитного поля даются функциями Бесселя:

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 J_0(\mu r), \\ B_\theta &= B_0 J_1(\mu r). \end{aligned} \quad (12.115)$$

Распределение полей приведено на рис. 12.9. Тот факт, что продольное магнитное поле спадает от центра



**Рис. 12.9**  
Канонические радиальные профили продольного и азимутального магнитных полей в пинче

к периферии шнура, связан с сильным азимутальным полем — велика азимутальная составляющая тока, текущего вдоль силовой линии. Форма профилей зависит от параметра  $\mu a$ , где  $a$  — радиус шнура. Величина  $\mu a$  связана с отношением полного продольного тока к тороидальному магнитному потоку:

$$\mu a = \frac{4\pi a I}{c\psi_T}. \quad (12.116)$$

При увеличении параметра  $\mu a$  профили становятся более пикированными, при значении  $\mu a = 2,4$  продольное магнитное поле обращается в ноль на границе шнура, а при  $\mu a > 2,4$  продольное магнитное поле на периферии шнура меняет знак. Канонические профили (12.115) и эффект обращения поля хорошо соответствуют экспериментальным профилям, наблюдаемым в пинчах с обращенным полем.

## Глава 13. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ТОКАМАКАХ

**Р**авновесие плазмы не означает отсутствия в ней течений вдоль и поперек магнитных поверхностей; соответствующие скорости должны лишь быть малы по сравнению со звуковыми и альфвеновскими скоростями. В этой главе мы проанализируем такие течения на примере токамака и, в частности, найдем потоки частиц, тепла и момента поперек магнитных поверхностей. Потоки эти, вызванные парными кулоновскими столкновениями, получили название неоклассических, а соответствующие коэффициенты переноса называются «неоклассическими коэффициентами переноса». Приставка «нео» здесь отражает тот факт, что потоки вычисляются в сложной геометрии, по сути же дела, рассматриваемые в этой главе потоки являются классическими, в отличие от турбулентного переноса, примеры которого обсуждались в главе 8.

Анализ для магнитных поверхностей произвольной формы следует проводить, используя систему координат, рассмотренную в предыдущем разделе. Чтобы упростить изложение, ниже мы будем рассматривать самый простой вариант круговых магнитных поверхностей, а в конце главы будут приведены и общие выражения, справедливые для магнитных поверхностей произвольной формы.

Пока же выберем простейшую модель магнитного поля, соответствующую случаю малой тороидальности  $\epsilon \ll 1$  и круговых магнитных поверхностей. Выберем более простое, чем в разделе 12.6, модельное магнитное поле:

$$\begin{aligned}
 B_T &= \frac{B_T^0}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} \approx B_T^0 (1 - \varepsilon \cos \theta), \\
 B_p &\equiv B_\theta = B_p^0 (1 - \varepsilon \cos \theta) = \Theta B_T, \\
 B_0 &= \sqrt{(B_T^0)^2 + (B_p^0)^2}, \\
 \varepsilon &= r / R_0.
 \end{aligned}
 \tag{13.1}$$

При таком модельном представлении величина  $\Theta = B_p / B_T$  не зависит от полоидального угла  $\theta$ . Будем полагать  $\Theta \ll 1$ , так что  $\Theta \approx B_p^0 / B_0$ . В качестве координаты  $a$ , характеризующей магнитную поверхность, выберем малый радиус  $r$ . Координаты  $\theta$ ,  $\zeta$  по-прежнему соответствуют полоидальному и тороидальному углу (рис. 13.1). Элемент длины:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + R_0^2 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 d\zeta^2, \tag{13.2}$$

а компоненты метрического тензора равны

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\zeta\zeta} = R_0^2 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2. \tag{13.3}$$

Будем полагать ларморовский радиус ионов  $\rho_{ci}$  достаточно малым, так что выполнено неравенство

$$\rho_{ci} / (r\Theta) \ll 1. \tag{13.4}$$

Это условие, как правило, выполняется в токамаках. Ларморовский радиус и тепловая скорость определены как

$$\begin{aligned}
 \rho_{cj} &= \frac{(2T_j / m_j)^{1/2}}{\omega_{cj}}; \\
 V_{Tj} &= \sqrt{\frac{2T_j}{m_j}}.
 \end{aligned}
 \tag{13.5}$$

Макроскопические величины будем представлять в виде ряда по малому параметру, содержащему малый множитель  $\varepsilon$ :

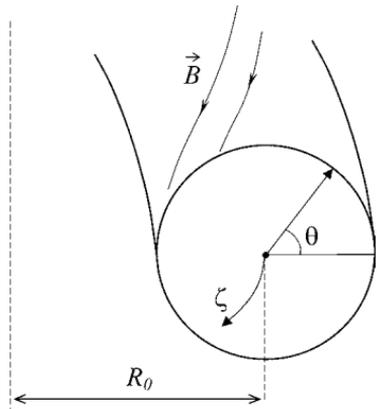


Рис. 13.1 Система координат с круговыми магнитными поверхностями, используемая для анализа процессов переноса

$$\begin{aligned}
 n(r, \theta) &= n_0(r) + n_1(r, \theta) \dots ; \\
 T_j(r, \theta) &= T_{0j}(r) + T_{1j}(r, \theta) \dots ; \\
 \varphi(r, \theta) &= \varphi_0(r) + \varphi_1(r, \theta) \dots ; \\
 u_{j\parallel}(r, \theta) &= u_{j\parallel 0}(r) + u_{j\parallel 1}(r, \theta) \dots .
 \end{aligned}
 \tag{13.6}$$

Здесь первый член разложения соответствует цилиндрическому приближению и не зависит от полоидального угла, а второй член линеен по параметру  $\varepsilon$ . Отметим, что температуры частиц, концентрация и потенциал, в отличие от полного давления, не являются поверхностными величинами и зависят от полоидального угла  $\theta$ . Здесь величина  $\varphi_0$  представляет собой средний потенциал на магнитной поверхности, а величина  $u_{j\parallel 0}$  соответствует средней скорости плазмы (ионов) вдоль силовых линий магнитного поля.

### 13.1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ (РЕЖИМ ПФИРША — ШЛЮТЕРА)

Проанализируем вначале гидродинамический режим, в котором длина свободного пробега частиц мала по сравнению с одной длиной обхода силовой линии в тороидальном направлении:

$$\lambda_j = \frac{V_{Tj}}{v_j} < \frac{r}{\Theta} = qR.
 \tag{13.7}$$

Здесь  $v_i \equiv v_{ii}$ ,  $v_e \equiv v_{ei}$ . Такой режим реализуется при больших температурах в малых токамаках или вблизи сепаратрисы в современных установках. В этом режиме плазма описывается системой гидродинамических уравнений, приведенных в главе 2, что позволяет относительно просто исследовать характер переноса.

#### 13.1.1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Прежде чем переходить к решению гидродинамических уравнений, приведем качественные оценки потоков частиц и тепла, обусловленных тороидальностью. Начнем с оценки возмущения температуры на магнитной

поверхности. Электроны и ионы в неоднородном магнитном поле токамака испытывают вертикальный дрейф со скоростями (11.9), направленными вверх и вниз соответственно. Скорости, усредненные по максвелловской функции распределения, даются выражением

$$u_{gj} = \frac{2cT_j}{e_j BR}. \quad (13.8)$$

При этом возникают вертикальные потоки ведущих центров и течет вертикальный ток ведущих центров (11.10):

$$j_g = \frac{2cn(T_e + T_i)}{BR}. \quad (13.9)$$

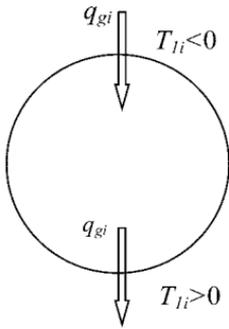
С потоками ведущих центров связаны и вертикальные потоки тепла ионов и электронов:  $q_{gj} = (5/2) T_j (nu_{gj})$ . В плазме с неоднородной температурой дивергенция этих потоков отлична от нуля, что приводит к возмущению температур частиц на магнитной поверхности. В результате появляется поток тепла вдоль силовых линий магнитного поля, обусловленный теплопроводностью, дивергенция которого компенсирует дивергенцию вертикального потока тепла. Соответствующий баланс имеет вид (численные коэффициенты опускаем)

$$\frac{cn_0 T_{0j}^2}{eB_0 R_0 r} \sim \frac{\kappa_{j\parallel} T_{1j} \Theta^2}{r^2}. \quad (13.10)$$

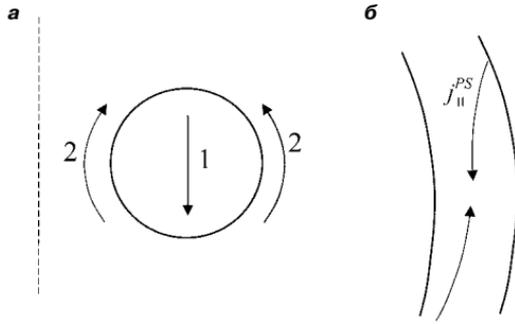
Здесь в качестве характерного радиального масштаба выбран малый радиус  $r$ , а в качестве характерного масштаба вдоль магнитного поля — длина силовой линии при обходе по большому радиусу  $r/\Theta = qR$ . Соотношение (13.10) с учетом выражения для ионной теплопроводности ( $\kappa_{j\parallel} \sim nT_j/(m_j v_j)$ ) позволяет оценить возмущение температуры на магнитной поверхности:

$$\frac{T_{1j}}{T_{0j}} \sim \frac{\varepsilon}{\Theta^2} \frac{v_j}{\omega_{cj}} = \frac{qv_j}{\Theta \omega_{cj}}. \quad (13.11)$$

Возмущение ионной температуры положительно на нижней части магнитной поверхности и отрицательно сверху, для электронов же наоборот — верхний обвод



**Рис. 13.2**  
 Схема формирования  
 среднего теплового  
 потока ионов  
 через магнитную  
 поверхность



**Рис. 13.3**  
 Схема замыкания тока:  
*a* — плоскость малого сечения; 1 — вертикаль-  
 ный ток, 2 — полоидальная проекция про-  
 дольного тока; *b* — замыкание тока вдоль си-  
 ловой линии.

немного горячее внутреннего (рис. 13.2). В первом приближении по  $\epsilon$  вертикальный поток тепла через верхний и нижний обвод одинаковы и средний поток через магнитную поверхность равен нулю. В следующем же приближении по  $\epsilon$ , из-за возмущения температуры на магнитной поверхности, поток тепла ионов через нижнюю половину магнитной поверхности оказывается большим, чем через ее верхнюю половину. В результате получается некомпенсированный поток тепла:

$$\langle\langle q_j \rangle\rangle \sim \frac{cnT_{0j}}{eB_0R_0} T_{1j} \sim q^2 \rho_{cj}^2 v_j \frac{n_0 T_{0j}}{r}. \quad (13.12)$$

Этот поток в  $q^2$  раз превосходит тепловой поток в прямом цилиндре ( $q_{\perp j} = -\kappa_{j\perp} dT_{0j}/dr$ ), приведенный в главе 2. Возмущение электронной температуры в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше, чем возмущение ионной температуры из-за большой продольной электронной теплопроводности. Поэтому и электронный поток тепла, усредненный по магнитной поверхности, в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше ионного в соответствии с (13.12).

Вертикальный ток (13.9), так же как и поток тепла, замыкается продольным током. Схема замыкания токов приведена на рис. 13.3. Продольный ток, замыкающий вертикальный ток, называется током Пфирша — Шлютера,

он имеет различные направления на внутреннем и внешнем обводах токамака. Чтобы оценить его величину, приравняем дивергенции радиального и продольного (дивергенцию его полоидальной проекции) токов:

$$\frac{cP}{BRr} \sim \Theta j_{\parallel}^{PS} / r, \quad (13.13)$$

откуда

$$j_{\parallel}^{PS} \sim \frac{cqp}{Br}. \quad (13.14)$$

Пфирш-шлютеровский ток оказывается в  $q$  раз больше диамагнитного тока.

### 13.1.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Вычислим теперь возмущение ионной температуры на магнитной поверхности из уравнения баланса тепла. Можно показать, используя полученные ниже выражения, что члены, содержащие направленные скорости в уравнении теплового баланса, малы по сравнению с теплопроводностными потоками. Будем также предполагать, что выполнено соотношение

$$\frac{\rho_{ci}}{\Theta r} \frac{v_j q R}{V_{Ti}} < 1, \quad (13.15)$$

которое обеспечивает малость возмущения температуры на магнитной поверхности. Пренебрежем также теплообменом с электронами. При этом стационарное уравнение баланса тепла ионов сводится к

$$\nabla \cdot \vec{q}_i = 0, \quad (13.16)$$

где поток тепла  $\vec{q}_i$  определен согласно (2.38)–(2.39):

$$\vec{q}_i = -\kappa_{i\parallel} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{i\perp} \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \cdot \frac{cn T_i}{eB} \cdot \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla T_i \right], \quad (13.17)$$

а коэффициенты теплопроводности вдоль и поперек магнитного поля

$$\kappa_{i\parallel} = \frac{3,9n T_i}{m_i v_i}, \quad \kappa_{i\perp} = \frac{2n T_i v_i}{m_i \omega_{ci}^2}. \quad (13.18)$$

Пренебрежем малой поперечной теплопроводностью и малым радиальным потоком тепла, связанным с третьим

слагаемым, тогда в выбранных координатах уравнение баланса тепла ионов имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} q_{i\theta} \right) = 0. \quad (13.19)$$

Согласно (13.17) полоидальный поток тепла

$$q_{i\theta} = \frac{5}{2} \frac{cnT_i(1 + \varepsilon \cos \theta)}{eB_0} \frac{dT_i}{dr} - \kappa_{i\parallel} \frac{\Theta^2}{r} \frac{\partial T_{1i}}{\partial \theta}. \quad (13.20)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой косо́й поток тепла, связанный с вращением по ларморовским окружностям (см. главу 2). В неоднородном магнитном поле его дивергенция отлична от нуля и совпадает с дивергенцией вертикального потока тепла ведущих центров. Второе слагаемое представляет собой полоидальную проекцию продольного ( $q_{i\parallel} = -\kappa_{i\parallel} \frac{\Theta}{r} \frac{\partial T_{1i}}{\partial \theta}$ ) потока тепла. Из (13.19) следует, что

$$\frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} q_{i\theta} = \text{const}(\theta). \quad (13.21)$$

Линеаризуя (13.20), (13.21) и приравнявая члены первого порядка по  $\varepsilon$ , содержащие  $\cos \theta$ , получаем

$$\kappa_{i\parallel} \frac{\Theta^2}{r} \frac{\partial T_{1i}}{\partial \theta} = 5 \frac{cn_0 T_{0i} \varepsilon}{eB_0} \frac{dT_{0i}}{dr} \cos \theta, \quad (13.22)$$

откуда

$$T_{1i}(r, \theta) = 5 \frac{cn_0 T_{0i} \varepsilon r}{eB_0 \kappa_{i\parallel} \Theta^2} \frac{dT_{0i}}{dr} \sin \theta. \quad (13.23)$$

Возмущение ионной температуры имеет максимум на нижнем обводе тора и по порядку величины соответствует оценке (13.11). При условии (13.15) это возмущение действительно мало:  $T_{1i}/T_{0i} < 1$ .

Используя выражение для  $T_{1i}$ , можно вычислить тороидальную добавку к радиальному потоку тепла, усредненную по магнитной поверхности. Среднее по поверхности от величины  $f$  есть

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \frac{1}{S} \oint f \sqrt{g_{\theta\theta}} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} d\theta d\zeta, \quad (13.24)$$

где площадь магнитной поверхности  $S$  дается выражением

$$S = \oint \sqrt{g_{\theta\theta}} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} d\theta d\zeta. \quad (13.25)$$

Для выбранной простой модели магнитного поля  $S = 4\pi^2 r R_0$ , а выражение для среднего по поверхности принимает вид

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} \oint f(1 + \varepsilon \cos\theta) d\theta. \quad (13.26)$$

Усредненный радиальный поток тепла ионов:

$$\begin{aligned} \langle\langle q_i \rangle\rangle &= \frac{1}{2\pi} \oint q_{ir} (1 + \varepsilon \cos\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} \frac{cn_0 T_{0i}}{eB_0} \frac{\partial T_{1i}}{r \partial \theta} (1 + \varepsilon \cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_{i\perp} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r} (1 + \varepsilon \cos\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Здесь дополнительный множитель  $(1 + \varepsilon \cos\theta)$  появляется из-за полоидальной зависимости магнитного поля в знаменателе. При вычислении потока все члены, содержащие произведения  $n_1$  и  $T_{1i}$ , а также  $n_2$  и  $T_{2i}$  обращаются в ноль при усреднении по магнитной поверхности, так как содержат произведения вида  $\sin\theta \cos\theta$ . Отбрасывая малые члены из (13.27), получаем выражение для потока тепла, найденное Шафрановым:

$$\langle\langle q_i \rangle\rangle = -(1,6q^2 + 1)\kappa_{i\perp} \frac{dT_{0i}}{dr}. \quad (13.28)$$

Здесь учтено, что

$$\frac{25c^2 n^2 T_i^2}{2e^2 B^2 \kappa_{i\parallel} \kappa_{i\perp}} = 1,6.$$

Таким образом, поток тепла, связанный с тороидальностью (первый член в (13.28)), оказывается в  $1,6q^2$  раз больше потока тепла в прямом цилиндре (второй член в (13.28)). Поток тепла ионов, связанный с тороидальностью, был вычислен как усредненный косой поток тепла, соответствующий последнему слагаемому в (13.17), физически же он соответствует вертикальному потоку тепла ведущих центров, усредненному по магнитной поверхности с учетом возмущения температуры на ней. Отметим, что главная тороидальная часть потока тепла квадратична по  $\varepsilon$ .

### 13.1.3. ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ НА МАГНИТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ВОЗМУЩЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ И ПОТЕНЦИАЛА

Равновесные течения плазмы на магнитной поверхности найдем из уравнения непрерывности:

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{rr}}} n u_{jr} \right) + \frac{1}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} n u_{j\theta} \right) = 0. \quad (13.29)$$

Радиальная скорость частиц получается из полоидальной проекции уравнения баланса сил в пренебрежении вязкостью и инерцией:

$$u_{jr} = -\frac{c}{B_T r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{c}{e_j n B_T r} \frac{\partial p_{1j}}{\partial \theta}. \quad (13.30)$$

Мы пренебрегли здесь перпендикулярной силой трения, которая приводит к классическому радиальному диффузионному потоку в цилиндре, рассмотренному в главе 7. Так как возмущения на магнитной поверхности малы, то вкладом радиальных потоков в уравнение непрерывности можно пренебречь. В этом можно убедиться, подставив полученные ниже выражения для возмущений давления и потенциала в (13.10). По этой же причине пренебрежем возмущением концентрации в уравнении непрерывности и заменим (13.29) на

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} n_0 u_{j\theta} \right) = 0. \quad (13.31)$$

Из радиального баланса сил имеем

$$u_{j\theta} = -\frac{c E_r}{B_T} + \frac{B_p}{B_T} u_{jT} + \frac{c}{e_j n B_T} \frac{dp_j}{dr}, \quad (13.32)$$

где  $u_{jT}$  — тороидальная скорость частиц. Можно выбрать два других направления — параллельное и перпендикулярное магнитному полю, причем перпендикулярное направление лежит на магнитной поверхности. Тогда радиальный баланс сил приводит к соотношению

$$u_{j\perp} = -\frac{cE_r}{B} + \frac{c}{e_j n B} \frac{dp_j}{dr} = V_0 + u_{pj}. \quad (13.33)$$

Первое слагаемое здесь представляет собой дрейф в радиальном электрическом поле, а второе слагаемое — диамагнитный дрейф. Первое и третье слагаемое в (13.32) представляют собой проекцию перпендикулярной скорости на полоидальное направление и в силу малости полоидального магнитного поля эти величины практически совпадают с  $V_0$  и  $u_{pj}$ . Продольная скорость также проектируется на полоидальное направление, причем продольная и тороидальная скорости почти совпадают (вклад в тороидальную скорость дает также малый компонент от  $u_{j\perp}$ ). Поэтому с хорошей точностью

$$u_{j\theta} = V_0 + \Theta u_{j\parallel} + u_{pj}. \quad (13.34)$$

Из (13.31) следует

$$\frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} u_{j\theta} = \text{const}(\theta). \quad (13.35)$$

После подстановки (13.34)

$$\left( -\frac{cE_r}{B_0} + \frac{c}{e_j n B_0} \frac{dp_j}{dr} \right) (1 + \varepsilon \cos\theta)^2 + \Theta u_{j\parallel} (1 + \varepsilon \cos\theta) = \text{const}(\theta). \quad (13.36)$$

Приравнивая члены первого порядка по  $\varepsilon$ , имеем

$$\begin{aligned} u_{j\parallel}(r, \theta) &= -2\varepsilon \left( -\frac{cE_r}{B_p^0} + \frac{c}{e_j n B_p^0} \frac{dp_{0j}}{dr} \right) \cos\theta + \bar{U}_{\parallel} (1 - \varepsilon \cos\theta) = \\ &= u_{j\parallel}^{PS} + \bar{U}_{\parallel} (1 - \varepsilon \cos\theta). \end{aligned} \quad (13.37)$$

Здесь величина  $\bar{U}_{\parallel}$  представляет собой среднюю, не зависящую от угла  $\theta$ , совместную параллельную скорость электронов и ионов, причем с рассматриваемой точностью  $\bar{U}_{\parallel} = \bar{U}_T$ . Мы пренебрегаем также отличием в средних скоростях электронов и ионов, связанным с протеканием среднего тока по плазме.

Первое слагаемое  $u_{j\parallel}^{PS}$  представляет собой так называемый поток Пфирша — Шлютера. Параллельный поток,

пропорциональный градиенту давления, замыкает диамагнитные потоки, дивергенция которых в неоднородном магнитном поле отлична от нуля, или, на языке ведущих центров, замыкает вертикальный дрейф ведущих центров. Аналогичный член связан с полоидальным вращением плазмы в скрещенных электрическом и неоднородном магнитном полях, дивергенция которых также отлична от нуля. Второе слагаемое в (13.37) связано со средней скоростью тороидального вращения плазмы. Из-за того, что площадь внешнего обвода тора больше, чем площадь внутреннего обвода, параллельная скорость на внешнем обводе оказывается меньше, чтобы обеспечить условие  $\nabla \cdot \vec{u}_j = 0$ .

Вычитая параллельную скорость электронов из ионной скорости, получаем выражение для тока Пфирша — Шлютера:

$$j_{\parallel}^{PS} = -2\varepsilon \frac{c}{B_p^0} \frac{dp}{dr} \cos\theta, \quad (13.38)$$

соответствующее оценке (13.14). Здесь  $p = p_{0e} + p_{0i}$  — полное давление плазмы.

Из-за относительной скорости электронов и ионов вдоль магнитного поля возникает продольная сила трения  $R_{ei}^u = 0,51m_e v_e j_{\parallel}^{PS} / e$ . Кроме нее существует еще и термосила, вызванная возмущением электронной температуры на магнитной поверхности. Возмущение  $T_{1e}$  находится, как и возмущение ионной температуры, из условия

$$\nabla \cdot \vec{q}_e = 0, \quad (13.39)$$

где поток тепла электронов содержит дополнительный член, пропорциональный пфирш-шлютеровскому току (см. главу 2 (2.44)):

$$\begin{aligned} \vec{q}_e = & -\kappa_{e\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp} T_e - \\ & - \frac{5}{2} \frac{cnT_e}{eB} \left[ \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla T_e \right] - 0,71T_e j_{\parallel}^{PS} / e. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Возмущение электронной температуры имеет вид

$$T_{1e}(r, \theta) = -\frac{cn_0 T_{0e} \varepsilon r}{eB_0 \kappa_{e\parallel} \Theta^2} \sin\theta \left[ 5 \frac{dT_{0e}}{dr} + 1,42 \frac{1}{n_0} \frac{dp_0}{dr} \right]. \quad (13.41)$$

Оно в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше возмущения ионной температуры. Продольная термосила равна

$$R_{ei\parallel}^T = -0,71\Theta\partial T_{ie}/r\partial\theta.$$

В результате суммарная сила трения:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= R_{ei\parallel}^u + R_{ei\parallel}^T = \\ &= -\frac{c^2 n_0^2 T_{0e} \varepsilon}{e B_0 \kappa_{e\parallel} \Theta} \left[ 3,55 \frac{dT_{0e}}{dr} + 4,14 \frac{1}{n_0} \frac{dp_0}{dr} \right] \cos\theta. \end{aligned} \quad (13.42)$$

Уравнения продольного баланса сил для электронов и ионов имеют вид (инерцией и вязкостью пренебрегаем)

$$-\Theta T_{0e} \frac{1}{r} \frac{\partial n_1}{\partial \theta} - \Theta n_0 \frac{1}{r} \frac{\partial T_{1e}}{\partial \theta} + e n_0 \Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + R_{\parallel} = 0, \quad (13.43)$$

$$-\Theta T_{0i} \frac{1}{r} \frac{\partial n_1}{\partial \theta} - \Theta n_0 \frac{1}{r} \frac{\partial T_{1i}}{\partial \theta} - e n_0 \Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - R_{\parallel} = 0. \quad (13.44)$$

В этих уравнениях сила трения и градиент электронного давления, обусловленный возмущением электронной температуры, в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше остальных членов, поэтому, пренебрегая ими, получаем

$$\frac{e\phi_1}{T_{0e}} = \frac{n_1}{n_0} = -\frac{T_{1i}}{T_{0e} + T_{0i}}. \quad (13.45)$$

Возмущение концентрации положительно на верхней части магнитной поверхности, а полоидальный градиент полного давления, вызванного градиентом концентрации,

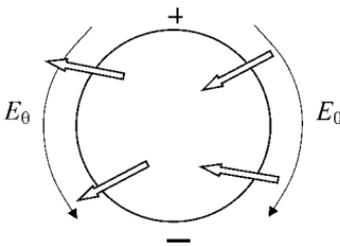


Рис. 13.4

Полоидальное электрическое поле и вызванные им дрейфы частиц

уравновешивает градиент давления, связанного с возмущением ионной температуры. В результате полное давление  $p = p_0$  не возмущено и является поверхностной величиной в соответствии с результатами, полученными в предыдущей главе. Возмущение потенциала в рассматриваемом приближении соответствует распределению

Больцмана, при этом возмущение потенциала, так же как и возмущение концентрации, положительно в верхней части магнитной поверхности (рис. 13.4). Полоидальное электрическое поле на внешнем обводе отрицательно, а на внутреннем обводе — положительно, а вызываемый этим полем дрейф плазмы на внешнем обводе направлен внутрь магнитной поверхности.

#### 13.1.4. ПОТОКИ ЧАСТИЦ

Диффузия плазмы в токамаке носит характер своеобразной конвекции — радиальный поток частиц представляет собой усредненный по магнитной поверхности конвективный поток. Из рис. 13.4 может сложиться впечатление, что усредненный поток направлен внутрь, так как внешний обвод тора больше внутреннего. Это, однако, неверно, так как полный поток поперек магнитной поверхности содержит вертикальный дрейф частиц (полоидально-неоднородную часть радиального диамагнитного потока). В первом приближении полный усредненный поток частиц обращается в ноль из-за почти больцмановского распределения (13.45). Чтобы получить отличное от нуля значение потока частиц, следует сохранить в уравнении продольного баланса сил все члены. Действительно, согласно (13.30) радиальный поток электронов:

$$\begin{aligned} \Gamma_e &\equiv nu_{er} = \\ &= -\frac{cn}{B_T r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{cn}{e_j n B_T r} \frac{\partial p_{1e}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Используя продольный баланс сил для электронов (13.43), получаем

$$\Gamma_e = \frac{cR_{\parallel}}{eB_p}. \quad (13.47)$$

Это же соотношение легко получить, проектируя уравнение электронного баланса сил на тороидальное направление. В этом случае имеем баланс между силой Лоренца  $eB_p \Gamma_e / c$  и тороидальной силой  $R_T \approx R_{\parallel}$ . Подставляя (13.42) в (13.47) и выполняя усреднение по магнитной поверхности, получаем

$$\begin{aligned} \langle\langle \Gamma_e \rangle\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{cR_{\parallel}}{eB_p} (1 + \varepsilon \cos\theta) d\theta = \\ &= -\frac{n_0 c^2 m_e v_e q^2}{e^2 B_0^2} \left( 1,3 \frac{1}{n_0} \frac{dp_0}{dr} - 1,12 \frac{dT_{0e}}{dr} \right). \end{aligned} \quad (13.48)$$

Поток частиц, так же как и поток тепла, в  $q^2$  раз больше потока частиц в прямом цилиндре (7.10):

$$\Gamma_0 = -\frac{n_0 c^2 m_e v_e}{e^2 B_0^2} \left( \frac{1}{n_0} \frac{dp_0}{dr} + \frac{3}{2} \frac{dT_{0e}}{dr} \right).$$

Эффективный коэффициент диффузии

$$D_{eff} = \langle\langle \Gamma_e \rangle\rangle / (-d \ln n_0 / dr)$$

оказывается в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше, чем коэффициент ионной температуропроводности

$$\chi_i = \langle\langle q_i \rangle\rangle / (-3/2 n_0 dT_i / dr),$$

причем поток частиц не является чисто диффузионным.

Поток ионов в рассматриваемом приближении совпадает с потоком электронов. Действительно, из (13.30) и (13.44) получаем  $\Gamma_i = cR_{\parallel}/(eB_p)$  и  $\Gamma_e = \Gamma_i$ , так как оба потока выражаются через одну и ту же продольную силу трения в соответствии с (13.47). Для вычисления же амбиполярного электрического поля, как и в случае прямого цилиндра, надо учесть вязкие члены в уравнении баланса сил.

### 13.2. РАДИАЛЬНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, ПОЛОИДАЛЬНОЕ И ТОРОИДАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ

Чтобы проанализировать радиальное электрическое поле и вращение плазмы в токамаке, надо учесть вязкость и инерцию в уравнениях баланса сил, причем для продольных скоростей, малых по сравнению со скоростью звука, главными являются вязкие силы. Учтем ионную вязкость в суммарном уравнении продольного баланса сил (индекс  $i$  для краткости опускаем):

$$-\nabla_{\parallel} p - (\nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel})_{\parallel} = 0. \quad (13.49)$$

В отличие от приближения предыдущего раздела, полное давление уже не является поверхностной величиной. В тензоре вязкости достаточно учесть только продольную вязкость  $\bar{\pi}_{\parallel}$ . Эта часть тензора вязкости, связанная с коэффициентом  $\eta_0$ , приведена в главе 2 для однородного магнитного поля, параллельного оси  $z$ . В произвольном магнитном поле из соображений тензорной инвариантности тензор продольной вязкости может быть записан в виде

$$\pi_{\parallel\alpha\beta} = (p_{\parallel} - p_{\perp}) \left( \frac{B_{\alpha} B_{\beta}}{B} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (13.50)$$

Здесь разность параллельного и перпендикулярного давлений связана с тензором скоростей сдвигов и производными от ионных тепловых потоков:

$$(p_{\parallel} - p_{\perp}) = (p_{\parallel} - p_{\perp})^{\bar{u}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})^{\bar{q}}. \quad (13.51)$$

В соответствии с (2.47)–(2.48) первое слагаемое, которое определяет компонент  $\bar{\pi}_{\parallel}^{\bar{u}}$ , имеет вид

$$(p_{\parallel} - p_{\perp})^{\bar{u}} = -\frac{3}{2} \eta_0 \frac{B_j}{B} W_{jk} \frac{B_k}{B}, \quad (13.52)$$

где тензор скоростей сдвигов (2.47) в декартовых координатах:

$$W_{jk} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \bar{u}. \quad (13.53)$$

Вторая часть  $(p_{\parallel} - p_{\perp})^{\bar{q}}$  аналогичным образом выражается через потоки тепла.

Умножим уравнение продольного баланса сил (13.49) на величину  $B$  и усредним по магнитной поверхности с весом  $\sqrt{g} = \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\zeta\zeta}}$ :

$$-\langle \bar{B} \nabla p \rangle - \langle \bar{B} \nabla \cdot \bar{\pi}_{\parallel} \rangle = 0. \quad (13.54)$$

Среднее по объему между двумя соседними поверхностями здесь, в отличие от (13.24), определено согласно

$$\langle f \rangle = \oint f \sqrt{g} d\theta d\zeta / \oint \sqrt{g} d\theta d\zeta. \quad (13.55)$$

Первое слагаемое в (13.54) обращается в ноль, так как

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \nabla p \rangle &= \langle \nabla \cdot (p \vec{B}) \rangle - \langle p \nabla \cdot \vec{B} \rangle = \\ &= \langle \nabla \cdot (p \vec{B}) \rangle = \oint p \vec{B} d\vec{S} / \oint \sqrt{g} d\theta d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Здесь использовано условие  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , а интеграл по объему сводится к интегрированию по соседним магнитным поверхностям, поток магнитного поля через которые отсутствует. Таким образом, усредненный баланс сил вдоль магнитного поля имеет вид

$$\langle \vec{B} \nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel} \rangle = 0. \quad (13.57)$$

Преобразуем среднюю вязкость, используя простые декартовы координаты  $x_k$ :

$$\langle \vec{B} \nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel} \rangle = \left\langle \frac{\partial (B_i \pi_{\parallel ik})}{\partial x_k} \right\rangle - \left\langle \pi_{\parallel ik} \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right\rangle.$$

В первом слагаемом  $\partial (B_i \pi_{\parallel ik}) / \partial x_k$  согласно (13.50) пропорционально  $\nabla \cdot \vec{B}$  и поэтому первое слагаемое обращается в ноль, а второе преобразуем с учетом соотношения

$$\pi_{\parallel ik} \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = (p_{\parallel} - p_{\perp}) \left( \frac{B_i}{B} \frac{B_k}{B} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_k}{B} \frac{\partial B}{\partial x_k}.$$

Таким образом, уравнение (13.57) принимает вид

$$\langle \vec{B} \nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel} \rangle = \left\langle (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{\vec{B}}{B} \nabla B \right\rangle = 0. \quad (13.58)$$

Вычислим часть тензора вязкости, связанную с неоднородными скоростями. С учетом  $\nabla \cdot \vec{u}_i = 0$ ,

$$\begin{aligned} (p_{\parallel} - p_{\perp})^{\bar{u}} &= -\frac{3}{2} \eta_0 \frac{B_j}{B} W_{jk} \frac{B_k}{B} = \\ &= -3\eta_0 \left( \Theta \frac{\partial u_{i\parallel}}{r \partial \theta} - u_{i\theta} \varepsilon \sin \theta + \Theta \bar{U}_{\parallel} \varepsilon \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (13.59)$$

Здесь последние два члена связаны с изменением криволинейных координат в пространстве и пропорциональны  $\partial \sqrt{g_{\zeta\zeta}} / \partial \theta$ . Подставляя выражения для полоидальной и продольной скоростей (13.34) и (13.37), с учетом соотношения  $(\vec{B}/B) \nabla B = B_p \varepsilon \sin \theta / r$ , получаем

$$\begin{aligned} & \langle \vec{B}\nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel} \rangle^{\bar{u}} = \\ & = -\frac{3\Theta^2}{2R_0^2} \eta_0 B \left( -\frac{cE_r}{B_p^0} + \frac{cT_{0i}}{enB_p^0} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{c}{eB_p^0} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r} + \bar{U}_{\parallel} \right). \end{aligned} \quad (13.60)$$

Учет вязкости, связанной с потоком тепла ионов, приводит к выражению

$$\begin{aligned} & \langle \vec{B}\nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel} \rangle = \\ & = -\frac{3\Theta^2}{2R_0^2} \eta_0 B \left( -\frac{cE_r}{B_p^0} + \frac{cT_{0i}}{enB_p^0} \frac{\partial n}{\partial r} + k_T \frac{c}{eB_p^0} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r} + \bar{U}_{\parallel} \right). \end{aligned} \quad (13.61)$$

Здесь численный коэффициент  $k_T$  зависит от степени столкновительности плазмы, в рассматриваемом гидродинамическом режиме  $k_T = 3,1$  [13].

Условие (13.57) приводит к выражению для неоклассического радиального электрического поля:

$$E_r = \frac{T_{0i}}{en} \frac{\partial n}{\partial r} + k_T \frac{1}{e} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r} + B_p^0 \bar{U}_{\parallel}. \quad (13.62)$$

Таким образом, радиальное электрическое поле, обращающееся в ноль усредненную продольную ионную вязкость, состоит из двух частей. Первые два члена, пропорциональные градиентам концентрации и ионной температуры, для спадающих по радиусу плотности и температуры соответствуют отрицательному (направленному от периферии к центру плазмы) электрическому полю. Последнее же слагаемое связано с тороидальным вращением плазменного шнура. Для тороидального вращения в направлении тока по плазме (в выбранной системе координат положительного) соответствующий вклад в радиальное электрическое поле положителен. Это последнее слагаемое может быть интерпретировано как появление дополнительного электрического поля  $B_p^0 \bar{U}_T$  при переходе в движущуюся с тороидальной скоростью  $\bar{U}_T \approx \bar{U}_{\parallel}$  систему отсчета в соответствии с преобразованием Лоренца. Отметим также, что средняя полоидальная скорость ионов в соответствии с (13.32) зависит только от градиента ионной температуры:

$$\bar{u}_{i0} = (1 - k_T) \frac{c}{eB_0} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r}. \quad (13.63)$$

В отличие от нее величина  $\bar{u}_{i\perp}$  зависит от скорости тороидального вращения, в соответствии с (13.33).

Скорость тороидального вращения плазмы находится из уравнения баланса сил в тороидальном направлении:

$$j_r B_p - (\nabla \cdot \bar{\pi}_{\parallel})_{\zeta} = nm_i \frac{dV_T}{dt}. \quad (13.64)$$

Здесь член в правой части символически отражает радиальный перенос тороидального импульса. В реальной ситуации такой поток является турбулентным, так как соответствующий неоклассический поток мал. В принципе аналогичный член входит и в уравнение продольного баланса сил (13.54), однако он оказывается малым по сравнению с продольной вязкостью. В (13.64) же этот член сохранен, так как усредненная по магнитной поверхности тороидальная вязкость, как показано ниже, обращается в ноль. Заметим, что, в отличие от рассмотренного в предыдущей главе идеального случая, при учете вязкости возникает радиальный ток, так что линии тока не лежат больше на магнитной поверхности. В то же время должно быть выполнено условие амбиполярности, т. е. условие отсутствия среднего радиального тока через магнитную поверхность:

$$\langle\langle j_r \rangle\rangle = 0. \quad (13.65)$$

Условие амбиполярности согласно (13.64) приводит к уравнению

$$-\left\langle\left\langle \frac{(\nabla \cdot \bar{\pi}_{\parallel})_{\zeta}}{B_p} \right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \frac{nm_i \frac{dV_T}{dt}}{B_p} \right\rangle\right\rangle. \quad (13.66)$$

Покажем, что член в левой части обращается в ноль. В криволинейных координатах

$$(\nabla \cdot \bar{\pi}_{\parallel})_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \pi_{\parallel\theta\zeta} \right) + \frac{\pi_{\parallel\theta\zeta}}{\sqrt{g_{\theta\theta} g_{\zeta\zeta}}} \frac{\partial \sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\partial \theta}. \quad (13.67)$$

Разделим тороидальную вязкость на полоидальное магнитное поле и усредним по магнитной поверхности:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \frac{(\nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel})_{\xi}}{B_p} \right\rangle \right\rangle = \\ & = \frac{1}{S} \oint \left( \frac{1}{B_p \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \pi_{\parallel 0\xi} \right) \right) \sqrt{g_{\theta\theta}} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} d\theta d\zeta + \\ & + \frac{1}{S} \oint \left( \frac{\pi_{\parallel 0\xi}}{B_p \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\zeta\zeta}}} \frac{\partial \sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\partial \theta} \right) \sqrt{g_{\theta\theta}} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} d\theta d\zeta. \quad (13.68) \end{aligned}$$

Произведение  $B_p \sqrt{g_{rr} g_{\zeta\zeta}}$  представляет собой величину, пропорциональную полоидальному магнитному потоку между соседними магнитными поверхностями, который не зависит от полоидальной координаты и может быть вынесен из-под интеграла. Учитывая соотношение

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\zeta\zeta}},$$

после интегрирования в первом слагаемом по частям получаем, что первый и второй члены компенсируют друг друга, так что

$$\left\langle \left\langle \frac{(\nabla \cdot \vec{\pi}_{\parallel})_{\zeta}}{B_p} \right\rangle \right\rangle = 0. \quad (13.69)$$

Так как при усреднении в (13.66) член с тороидальной вязкостью тождественно обращается в ноль, то условие амбиполярности сводится к виду

$$\left\langle \left\langle \frac{nm_i \frac{dV_T}{dt}}{B_p} \right\rangle \right\rangle = 0. \quad (13.70)$$

Это уравнение и определяет профиль тороидального вращения. Если на плазму действует сила в тороидальном направлении, например при нейтральной инжекции, то соответствующий член должен быть добавлен в правую часть.

### 13.3. НЕОКЛАССИЧЕСКИЙ ПЕРЕНОС В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

#### Траектории отдельных частиц

В разреженной плазме, в которой  $\lambda_j > qR$ , основной вклад в перенос вносят частицы с малыми продольными скоростями. Рассмотрим качественно характер их движения в токамаке. В магнитном поле сохраняется полная энергия частицы  $E = m_j V^2/2 - e_j \phi$  и магнитный момент  $\mu_j = m_j V_{j\perp}^2/2B$ . Продольная скорость частицы выражается через эти величины:

$$V_{j\parallel} = \pm \sqrt{\frac{2}{m_j} [E - e_j \phi - \mu_j B]}. \quad (13.71)$$

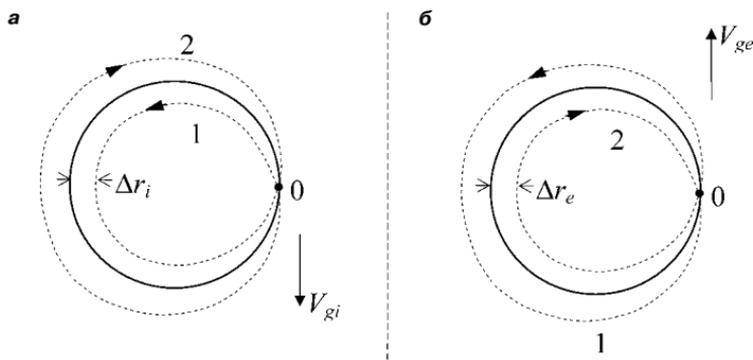
При анализе можно пренебречь слабой зависимостью потенциала от полоидального угла. Уравнения, которые описывают бесстолкновительное движение частицы, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= - \frac{V_{j\parallel}^2 + \mu_j B m_j}{\omega_{cj} R} \sin \theta, \\ r \frac{d\theta}{dt} &= - \frac{V_{j\parallel}^2 + \mu_j B m_j}{\omega_{cj} R} \cos \theta + \Theta V_{j\parallel} + V_0. \end{aligned} \quad (13.72)$$

Первые слагаемые в правых частях (13.72) представляют собой проекции вертикального дрейфа ведущих центров частиц (11.9) в неоднородном магнитном поле на радиальное и полоидальные направления соответственно. Слагаемое  $\Theta V_{j\parallel}$  является полоидальной проекцией параллельной скорости, а величина  $V_0$  соответствует полоидальному дрейфу в скрещенных электрическом и магнитном полях. Разделив одно уравнение на другое, можно получить уравнение траектории.

Траектории 1 соответствуют положительному (вдоль тока в токамаке) направлению параллельной скорости  $V_{j\parallel} > 0$ , а траектории 2 — отрицательному (против тока) направлению параллельной скорости  $V_{j\parallel} < 0$ .

Характер движения частиц существенно зависит от величины продольной скорости  $V_{j\parallel}$ . Если продольная и поперечная скорости одного порядка (например, порядка тепловой скорости), то изменение продольной скорости



**Рис. 13.5**  
Проекция траекторий пролетных частиц  
на плоскость малого сечения:

*a* — ионы; *b* — электроны.

вдоль траектории, возникающее согласно (13.71) из-за неоднородности магнитного поля, мало. В этом случае частица совершает полный оборот по полоидальному углу. Такая частица называется пролетной. Траектории пролетных частиц приведены на рис. 13.5. Ион, имеющий на внешнем обводе в точке *O* положительную скорость, движется в направлении  $\theta$  против часовой стрелки и одновременно смещается по радиусу за счет вертикального дрейфа. Так как дрейф  $V_{gi}$  направлен для ионов вниз, то в верхней части траектории ион отклоняется внутрь магнитной поверхности, а в нижней части траектории — наружу от магнитной поверхности. В результате его траектория оказывается замкнутой и лежащей внутри магнитной поверхности (рис. 13.5*a*). Ион, имеющий на внешнем обводе отрицательную скорость, отклоняется наружу от магнитной поверхности. Для электронов дрейф  $V_{ge}$  направлен вверх, поэтому траектория электрона, имеющего в точке *O* положительную скорость, находится снаружи от магнитной поверхности, а траектория электрона, имеющая отрицательную скорость, находится внутри магнитной поверхности (рис. 13.5*b*).

Среднее радиальное смещение относительно магнитной поверхности можно оценить согласно

$$\Delta r_j = V_{gj} v_{bj}. \quad (13.73)$$

Здесь баунс-частота

$$v_{bj} = \frac{\Theta V_{\parallel} + V_0}{r}, \quad (13.74)$$

представляет собой частоту (обратное время) оборота частицы в полоидальном направлении. Для частиц с тепловыми скоростями

$$\Delta r_j = u_{gj} v_{bj}^{-1} \sim \frac{c T_j}{e B R} \frac{r}{\Theta V_{Tj}} \sim q \rho_{cj}, \quad (13.75)$$

где  $u_{gj}$  — вертикальный дрейф для тепловой частицы (13.8). Мы пренебрегли вкладом  $V_0 \sim cT/eB$  по сравнению с полоидальной проекцией тепловой скорости  $\Theta V_{Tj}$ , так как выполнено условие (13.4).

Обсудим теперь характер движения частиц, которые на внешнем обводе имеют малую продольную скорость.

Траектории 1 соответствуют положительному (вдоль тока в токамаке) направлению параллельной скорости  $V_{\parallel} > 0$ , а траектории 2 — отрицательному (против тока) направлению параллельной скорости  $V_{\parallel} < 0$ . Положим вначале  $V_0 = 0$ . Согласно (13.71) при движении в полоидальном направлении продольная скорость частицы уменьшается, так как магнитное поле возрастает в направлении внутреннего обвода. Для пролетной частицы изменение невелико — порядка  $\varepsilon V_{\parallel j}$ , в то время как для малых продольных скоростей продольная скорость обращается в ноль, то есть возникает точка поворота. Траектория такой частицы имеет форму банана (рис. 13.6), а сами частицы называются «запертыми» или «банановыми». Ионы, имеющие на внешнем обводе положительную скорость, смещаются внутрь магнитной поверхности (рис. 13.6а). После точки поворота ионы летят в направлении внешнего обвода и продолжают смещаться вниз. В нижней части траектории ионы отклоняются наружу от магнитной поверхности и во второй точке поворота происходит еще одно изменение направления скорости. В результате проекция траектории на плоскость малого сечения имеет вид банана. Ионы, имеющие на внешнем обводе отрицательную скорость, смещаются наружу от магнитной поверхности. Траектории банановых электронов приведены на рис. 13.6б.

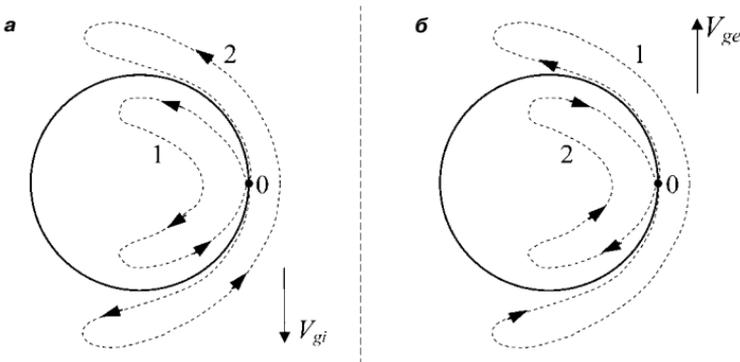


Рис. 13.6

Проекция траекторий запертых частиц на плоскость малого сечения:  
 а — ионы; б — электроны.

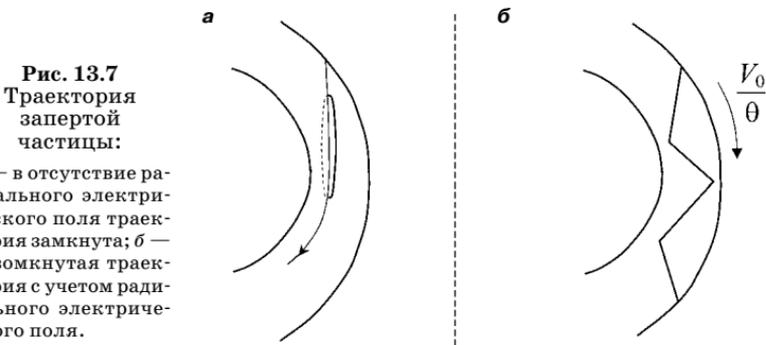


Рис. 13.7  
 Траектория запертой частицы:

а — в отсутствие радиального электрического поля траектория замкнута; б — разомкнутая траектория с учетом радиального электрического поля.

Электроны, имеющие положительную скорость в точке  $O$ , находятся снаружи от магнитной поверхности, а электроны с отрицательными скоростями — внутри магнитной поверхности. Траектория частиц в пространстве при  $V_0 = 0$  соответствует рис. 13.7а.

Найдем наибольшее значение величины параллельной скорости, при которой частица еще является запертой. При этом точка поворота находится на внутреннем обводе в экваториальной плоскости. Запишем соотношение (13.71) для такой частицы на внешнем и внутреннем обводах:

$$V_{\parallel}^{\max} = \sqrt{\frac{2}{m_j} [E - e_j \phi - \mu_j B^{\min}]}, \quad 0 = \sqrt{\frac{2}{m_j} [E - e_j \phi - \mu_j B^{\max}]}, \tag{13.76}$$

где  $B^{\min}$ ,  $B^{\max}$  — значения магнитного поля на внешнем и внутреннем обводах соответственно. Исключая энергию частицы, получаем

$$V_{\parallel}^{\max} = \sqrt{\frac{2}{m_j} [\mu_j B^{\max} - \mu_j B^{\min}]} \approx \sqrt{2\varepsilon} V_{j\perp}. \quad (13.77)$$

Для частиц с тепловой энергией частица является запертой, если величина параллельной скорости лежит в диапазоне

$$0 \leq V_{\parallel} \leq \sqrt{2\varepsilon} V_{Tj}. \quad (13.78)$$

Для запертых частиц со скоростями порядка тепловой скорости смещение относительно магнитной поверхности и ширина банана даются оценкой:

$$\Delta r_j = u_{gj} v_{bj}^{-1} \sim \frac{c T_j}{e B R} \frac{r}{\sqrt{\varepsilon} \Theta V_{Tj}} \sim \frac{q \rho_{cj}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (13.79)$$

Характер движения пролетной частицы не меняется существенно при учете полоидального  $[\vec{E} \cdot \vec{B}]$  дрейфа со скоростью  $V_0$ , так как эта скорость мала по сравнению с  $\Theta V_{Tj}$ . Для запертых же частиц ситуация меняется. Из-за радиального электрического поля кинетическая энергия частицы меняется при смещении по радиусу, поэтому (13.76) принимает вид

$$\begin{aligned} V_{\parallel}^{\max} &= \sqrt{\frac{2}{m_j} [E - e_j \phi^{\text{out}} - \mu_j B^{\min}]}, \\ 0 &= \sqrt{\frac{2}{m_j} [E - e_j \phi^{\text{in}} - \mu_j B^{\max}]}, \end{aligned} \quad (13.80)$$

где  $\phi^{\text{out}}$ ,  $\phi^{\text{in}}$  — значения потенциала на внешнем и внутреннем обводах. Учитывая, что

$$\phi^{\text{out}} - \phi^{\text{in}} \sim V_0 B \Delta r_j \sim V_0 B \frac{q \rho_{cj}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (13.81)$$

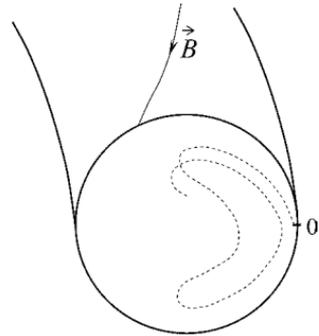
раскладывая подкоренное выражение в ряд по  $V_0/\Theta V_{Tj}$ , получим условие запертости для частицы на внешнем обводе:

$$0 \leq V_{\parallel} + \Theta V_0 \leq \sqrt{2\varepsilon} V_{Tj}. \quad (13.82)$$

Таким образом, частица, скорость которой на внешнем обводе удовлетворяет данному условию, имеет точку поворота, и проекция ее траектории на плоскость  $(r, \theta)$  по-прежнему имеет вид банана. В то же время в среднем параллельная (или тороидальная) скорость остается конечной, порядка  $-V_0/\Theta$ . Поэтому в тороидальном направлении траектория частицы разомкнута и происходит тороидальная прецессия частицы со скоростью  $-V_0/\Theta$  (рис. 13.7б).

#### Дрейф Уэйра

В банановом режиме имеется специфическое явление — совместный дрейф электронов и ионов к центру плазменного шнура, обусловленный тороидальным электрическим полем  $E_T$ . Учет  $E_T$  приводит к тому, что траектория частиц в плоскости  $(r, \theta)$  оказывается незамкнутой (рис. 13.8). Частицы (ионы), имеющие на внешнем обводе положительную скорость, ускоряются электрическим полем в верхней части траектории и получают дополнительную энергию  $\Delta m_j V_{j\parallel}^2 / 2$ . Поэтому изменяется положение точки поворота, в результате чего частица пролетает дополнительное расстояние в полоидальном направлении, одновременно смещаясь за счет вертикального дрейфа внутрь магнитной поверхности. На внутренней части траектории поле  $E_T$  тормозит движение частицы, которая теперь не долетает до точки поворота при  $E_T = 0$ . В результате частица смещается внутрь исходной магнитной поверхности. Скорость усредненного дрейфа можно оценить следующим образом: изменение среднего радиального смещения частицы  $\delta(\Delta r)$  связано с изменением средней скорости:



**Рис. 13.8**  
Разомкнутая траектория иона в тороидальном электрическом поле

$$\delta(\Delta r_j) = \frac{u_{gj}}{\Theta V_{j\parallel}} \frac{\Delta V_{j\parallel}}{V_{j\parallel}}, \quad (13.83)$$

где величина  $\Delta V_{j\parallel}$  обусловлена работой электрического поля  $eE_T$ :

$$\Delta V_{j\parallel} = \frac{eE_T}{m_j} \frac{r}{\Theta V_{j\parallel}}. \quad (13.84)$$

Поток, связанный с дрейфом Уэйра, с учетом малого  $\delta n/n \sim \sqrt{\varepsilon}$  количества банановых частиц имеет вид

$$\langle\langle \Gamma \rangle\rangle \sim \sqrt{\varepsilon} n \delta(\Delta r_j) v_{bj}. \quad (13.85)$$

Комбинируя с (13.84) и (13.85), подставляя в качестве параллельной скорости величину  $\sqrt{\varepsilon} V_{Tj}$ , получаем

$$\langle\langle \Gamma \rangle\rangle \sim -\sqrt{\varepsilon} n \frac{c}{B_p} E_T. \quad (13.86)$$

Знак «-» соответствует направлению дрейфа Уэйра внутрь плазменного шнура. Анализ, основанный на решении кинетического уравнения, показывает, что дрейф Уэйра одинаков для электронов и ионов.

#### Оценки коэффициентов переноса в режиме плато

В этом режиме параметр столкновительности удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon^{3/2} < \frac{v_j}{V_{Tj}} qR < 1.$$

Другими словами, длина свободного пробега частиц, в отличие от рассмотренной в разделе 13.1, больше длины обхода  $qR$ . Оказывается, что при этом основной вклад в перенос вносят частицы с малыми продольными скоростями. При выполнении левого неравенства скорости их, однако, не настолько малы, чтобы неоднородность магнитного поля могла существенно изменить топологию траекторий, то есть вклад в перенос вносят пролетные частицы с малыми полоидальными скоростями.

Оценим коэффициент температуропроводности как средний квадрат отклонения от магнитной поверхности между столкновениями, умноженный на частоту столкновений:

$$\chi_j \sim \frac{\delta n}{n} \Delta r_j^2 v_j^{eff}. \quad (13.87)$$

Множитель  $\delta n/n$  учитывает относительную долю частиц с малыми полоидальными скоростями. Малые

полоидальные скорости соответствуют и малым продольным скоростям, так как мы считаем выполненным неравенство  $|V_0| < \Theta V_{Tj}$ , которое эквивалентно (13.4) при  $e\phi_0 \sim T_j$ . Поэтому

$$\delta n/n \sim V_{j\parallel}/V_{Tj}. \quad (13.88)$$

В качестве  $v_j^{eff}$  в оценку (13.87) следует подставлять частоту столкновений, которая соответствует изменению параллельной скорости на величину порядка ее самой. Оценить  $v_j^{eff}$  можно, исходя из того факта, что кулоновские столкновения представляют собой последовательные рассеяния на малые углы, причем движение частицы в пространстве скоростей имеет характер случайных блужданий. Приращение поперечной скорости согласно (1.29) имеет вид

$$(\Delta V_{j\perp})^2 \sim v_j V_j^2 t. \quad (13.89)$$

Для частицы, имеющей полную скорость порядка тепловой скорости  $V_j \sim V_{Tj}$  и малую параллельную скорость, последняя существенно меняется при  $\Delta V_{j\perp} \sim V_{j\parallel}$ . Соответствующее время  $t \sim (V_{j\parallel}/V_{Tj})^2/v_j$ , а эффективная частота

$$v_j^{eff} \sim \frac{v_j}{(V_{j\parallel}/V_{Tj})^2}. \quad (13.90)$$

Среднее отклонение от магнитной поверхности для пролетной частицы с малой параллельной скоростью

$$\Delta r_j \sim \frac{cT_j}{eBR} \frac{r}{\Theta V_{j\parallel}}. \quad (13.91)$$

Подставляя (13.88), (13.90) и (13.91) в (13.87), получаем

$$\chi_j \sim \left( \frac{cT_j}{eBR} \right)^2 \frac{r^2 (V_{Tj})^2 v_j^2}{\Theta^2 (V_{j\parallel})^3}. \quad (13.92)$$

Это выражение расходится при  $V_{j\parallel} \rightarrow 0$ . Однако с уменьшением  $V_{j\parallel}$  баунс-частота  $v_{bj} = r/\Theta V_{j\parallel}$  падает, а эффективная частота столкновений (13.90) растет.

Поэтому существует минимальное значение продольной скорости  $V_{j\parallel}^{min}$ , соответствующее  $v_{bj} = v_j^{eff}$ . При меньшей скорости траектории частиц разрушаются за счет

столкновений, прежде чем совершат один оборот. Из условия  $v_{bj} = v_j^{eff}$  имеем

$$V_{j\parallel}^{\min} = (V_{Tj}^2 v_j r / \Theta)^{1/3}. \quad (13.93)$$

Полагая, что главный вклад в температуропроводность дают скорости порядка  $V_{j\parallel}^{\min}$ , подставляя (13.93) в (13.92), найдем окончательно:

$$\chi_j \sim \frac{q^2 \rho_{ci}^2 V_{Tj} \Theta}{r}. \quad (13.94)$$

Получившийся коэффициент температуропроводности не зависит от частоты столкновений, поэтому соответствующий режим называется режимом плато.

#### Оценки коэффициентов переноса в банановом режиме

При малых частотах столкновений, когда выполнено неравенство

$$\frac{v_j}{V_{Tj}} qR < \varepsilon^{3/2}, \quad (13.95)$$

скорость (13.93) становится меньше  $\sqrt{\varepsilon} V_{Tj}$ . В этом случае основной вклад в перенос вносят банановые частицы с продольными характерными скоростями  $V_{j\parallel} \sim \sqrt{\varepsilon} V_{Tj}$ . Для оценки коэффициента температуропроводности в банановом режиме воспользуемся формулой (13.87), в которой положим  $\delta n/n \sim \sqrt{\varepsilon} V_{Tj}$ , отклонение от магнитной поверхности согласно (13.79)  $\Delta r_j = q \rho_{cj} / \sqrt{\varepsilon}$ , а эффективную частоту столкновений оценим как  $v_j^{eff} = v_j / \varepsilon$ . Получаем

$$\chi_j \sim \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Theta^2} \rho_{cj}^2 v_j. \quad (13.96)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в действительности дело обстоит более сложно — основной вклад в перенос дают запертые и околопролетные частицы из узкой переходной области в пространстве скоростей, разделяющей траектории с различной топологией.

Во всех рассмотренных режимах коэффициент температуропроводности для ионов оказывается в  $\sim \sqrt{m_i/m_e}$  раз большим, чем для электронов. Зависимость же от частоты столкновений иллюстрируется рис. 13.9, где разные участки кривой соответствуют формулам (13.28), (13.94) и (13.96). Такая температуропроводность называется нео-

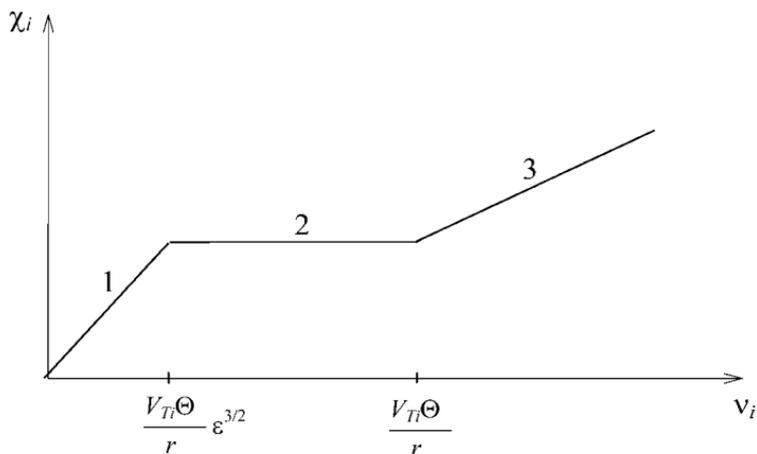


Рис. 13.9

Неоклассическая ионная теплопроводность:

1 — банановый режим; 2 — режим плато; 3 — режим Пфирша — Шлютера.

классической. В банановом режиме коэффициент неоклассической теплопроводности в  $\epsilon^{-3/2}$  раз больше, чем в режиме Пфирша — Шлютера, а при промежуточных частотах столкновений (режим плато) перенос не зависит от частоты столкновений.

#### 13.4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

##### Режим плато

Исходным для анализа является кинетическое уравнение в дрейфовом приближении, рассмотренное в разделе 1.7:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \dot{\vec{R}}_j \frac{\partial f_j}{\partial \vec{R}} + \dot{V}_{j\parallel} \frac{\partial f_j}{\partial V_{j\parallel}} + \dot{V}_\perp \frac{\partial f_j}{\partial V_{j\perp}} = St_j. \quad (13.97)$$

Для токамака скорость ведущего центра частицы:

$$\dot{\vec{R}} = V_{jg} - \frac{c}{B^2} [\nabla\phi \cdot \vec{B}] + V_{j\parallel}, \quad (13.98)$$

где вертикальный дрейф в неоднородном магнитном поле, в соответствии с (11.9),

$$V_{jg} = \frac{cm_j \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right)}{e_j BR}. \quad (13.99)$$

Изменение продольной и поперечной скоростей в соответствии с общими формулами раздела 1.7:

$$\dot{V}_{j\parallel} = -\frac{e_j \Theta}{m_j} \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} - \frac{V_{j\perp}^2}{2} \frac{\Theta \varepsilon \sin \theta}{r} + \frac{\Theta \varepsilon \sin \theta V_0 V_{j\parallel}}{r}; \quad (13.100)$$

$$\dot{V}_{j\perp} = \frac{\Theta \varepsilon \sin \theta}{r} \frac{V_{j\parallel} V_{j\perp}}{2} + \frac{\Theta \varepsilon \sin \theta V_0 V_{j\perp}}{r}. \quad (13.101)$$

Первый член в (13.101) и второй член в (13.100) связаны с сохранением магнитного момента  $\mu_j = m_j V_{j\perp}^2 / 2B$  в неоднородном магнитном поле. Например, первый член в (13.101) нетрудно получить следующим образом (при  $V_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j\perp} &= \frac{dV_{j\perp}}{dl_{\parallel}} \frac{dl_{\parallel}}{dt} = \frac{\Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{\frac{2B\mu_j}{m_j}} V_{j\parallel} = \\ &= \frac{\Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sqrt{\frac{2B_0\mu_j}{m_j}} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta \right) \right] V_{j\parallel} = \frac{\Theta \varepsilon \sin \theta}{r} \frac{V_{j\parallel} V_{j\perp}}{2}. \end{aligned}$$

Первый член в (13.100) вызван изменением продольной скорости за счет работы полоидального электрического поля, имеющего проекцию на параллельное направление. Последние члены в (13.100) и (13.101) обусловлены изменением скорости электрического дрейфа в неоднородном магнитном поле.

Функцию распределения будем искать в виде

$$f_j(r, \theta) = f_{0j}(r) + f_{1j}(r, \theta) \dots \quad (13.102)$$

Здесь невозмущенная функция распределения представляет собой максвелловское распределение, сдвинутое на величину средней скорости:

$$f_{0j}(r) = \frac{n_0}{(2\pi T_{0j} / m_j)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m_j (V_{j\parallel} - \bar{U}_{\parallel})^2}{2T_{0j}} - \frac{m_j V_{j\perp}^2}{2T_{0j}} \right]. \quad (13.103)$$

Линеаризованное кинетическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\Theta V_{j\parallel} + V_0) \frac{\partial f_{1j}}{r \partial \theta} - \frac{c}{B} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} \frac{\partial f_{0j}}{\partial r} - \frac{c}{e_j B r} \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right) \varepsilon \sin \theta \frac{\partial f_{0j}}{\partial r} - \\
 - \frac{e_j \Theta}{m_j} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} \frac{\partial f_{0j}}{\partial V_{j\parallel}} - \frac{1}{r} \frac{m_j}{T_j} \varepsilon \sin \theta \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right) V_0 f_{0j} - \\
 - \frac{m_j}{T_j} \varepsilon \sin \theta \Theta \bar{U}_{\parallel} \frac{V_{j\perp}^2}{2} f_{0j} = -v_j f_{1j}. \quad (13.104)
 \end{aligned}$$

Здесь столкновительный член заменен упрощенным выражением, так как в дальнейшем частоту столкновений мы устремим к нулю. Комплексное решение кинетического уравнения дается выражением

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{1j} = \frac{-i}{\Theta V_{j\parallel} + V_0 - iv_j} \left[ \frac{c}{B} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} \frac{\partial f_{0j}}{\partial r} - i \frac{c}{e_j B r} \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right) \varepsilon \exp(i\theta) \frac{\partial f_{0j}}{\partial r} + \right. \\
 \left. + \frac{e_j \Theta}{m_j} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} \frac{\partial f_{0j}}{\partial V_{j\parallel}} - \frac{i}{r} \frac{m_j}{T_j} \varepsilon \exp(i\theta) f_{0j} \left( \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right) V_0 + \frac{V_{j\perp}^2}{2} \Theta \bar{U}_{\parallel} \right) \right]. \quad (13.105)
 \end{aligned}$$

Величину  $(\Theta V_{j\parallel} + V_0 - iv_j)^{-1}$  разобьем на вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Theta V_{j\parallel} + V_0 - iv_j} = \\
 = \frac{1}{(\Theta V_{j\parallel} + V_0)^2 + v_j^2} + \frac{iv_j}{(\Theta V_{j\parallel} + V_0)^2 + v_j^2}. \quad (13.106)
 \end{aligned}$$

Устремляя  $v_j \rightarrow 0$  и учитывая, что при интегрировании по скоростям главный вклад в интеграл во втором слагаемом дают резонансные скорости  $V_{j\parallel} = -V_0/\Theta$ , перепишем (13.106) в виде

$$\frac{1}{\Theta V_{j\parallel} + V_0} = P \left( \frac{1}{\Theta V_{j\parallel} + V_0} \right) + i\pi \delta(\Theta V_{j\parallel} + V_0). \quad (13.107)$$

Это выражение означает, что при интегрировании по параллельным скоростям необходимо вычислить два интеграла. Первый интеграл вычисляется в смысле главного значения, а второй интеграл содержит дельта-функцию и дает тот же результат, что и вычисление при малых значениях частоты столкновений в (13.106).

Окончательно вещественная часть возмущенной функции распределения  $f_{ij} = \text{Re}(\tilde{f}_{ij})$  определяется как

$$\tilde{f}_{ij} = \left[ P \left( \frac{1}{\Theta V_{j\parallel} + V_0} \right) + \pi \delta(\Theta V_{j\parallel} + V_0) \frac{\partial}{\partial \Theta} \right] \hat{A} f_{0j}, \quad (13.108)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A} = & \frac{e\phi_1}{m_i} \left( \Theta \frac{\partial}{\partial V_{j\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{cm_j}{e_j B} \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \\ & - \frac{m_j \varepsilon}{T_j} \cos \theta \left[ \left( \frac{V_{j\perp}^2}{2} + V_{j\parallel}^2 \right) V_0 + \frac{V_{j\perp}^2}{2} \Theta \bar{U}_{\parallel} \right]. \end{aligned} \quad (13.109)$$

Найденная функция распределения позволяет вычислить все макроскопические величины. Так, например, продольная скорость

$$u_{j\parallel} = \frac{2\pi}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{ij} V_{j\parallel} V_{j\perp} dV_{j\parallel} dV_{j\perp} \quad (13.110)$$

совпадает с гидродинамическим выражением (13.37). Полюидальное электрическое поле находится из условия квазинейтральности:

$$\int \tilde{f}_{ie} d\bar{V}_e = \int \tilde{f}_{ii} d\bar{V}_i, \quad (13.111)$$

откуда

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{0e}}{e} \frac{1}{1 + T_{0e}/T_{0i}} \frac{cm_i^{1/2} T_{0i}^{1/2} \varepsilon \sin \theta}{e B_0 \Theta} \times \\ & \times \left( \frac{d \ln n_0}{dr} + \frac{e}{T_{0i}} \frac{d\phi_0}{dr} + \frac{e B_0}{c T_{0i}} \Theta \bar{U}_{\parallel} + 0,5 \frac{d \ln T_{0i}}{dr} \right). \end{aligned} \quad (13.112)$$

Радиальное электрическое поле находится из условия (13.58). Вычисляя продольное и поперечное давление ионов согласно

$$p_{i\parallel} = 2 \int \frac{m_i V_{i\parallel}^2}{2} \tilde{f}_{ii} d\bar{V}_i, \quad p_{i\perp} = \int \frac{m_i V_{i\perp}^2}{2} \tilde{f}_{ii} d\bar{V}_i, \quad (13.113)$$

найдем, что (13.58) выполнено, если

$$E_r = \frac{T_{0i}}{en} \frac{\partial n}{\partial r} + 1,5 \frac{1}{e} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r} + B_p^0 \bar{U}_{\parallel}. \quad (13.114)$$

При этом возмущение потенциала:

$$\phi_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{0e}}{e} \frac{1}{1+T_{0e}/T_{0i}} \frac{cm_i^{1/2} T_{0i}^{1/2} \varepsilon \sin \theta}{e B_0 \Theta} \frac{d \ln T_{0i}}{dr}. \quad (13.115)$$

Возмущения концентрации и ионной температуры даются (13.45).

Радиальный поток частиц может быть вычислен согласно

$$\begin{aligned} & \langle \langle \Gamma_j \rangle \rangle = \\ & = \left\langle \left\langle \int d\vec{V}_j \left[ -\frac{cm_j \varepsilon (V_{j\perp}^2 / 2 + V_{j\parallel}^2) \sin \theta}{e B r} - \frac{c}{e B r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right] (f_{0j} + f_{1j}) \right\rangle \right\rangle. \end{aligned} \quad (13.116)$$

В первом приближении по параметру  $(m_i/m_e)^{1/2}$  он обращается в ноль, так как члены, содержащие полоидальное электрическое поле, скомпенсированы бесстолкновительной частью функции распределения, так что

$$\begin{aligned} & \langle \langle \Gamma_i \rangle \rangle = \\ & = \left\langle \left\langle \int d\vec{V}_i \pi \delta(V_0 + \Theta V_{i\parallel}) \frac{cm_j \varepsilon (V_{i\perp}^2 / 2 + V_{i\parallel}^2) \sin \theta}{e B r} \hat{A}_i f_{0i} \right\rangle \right\rangle \approx 0. \end{aligned} \quad (13.117)$$

Это, как и в гидродинамическом режиме, есть следствие бoльцмановского распределения частиц с большими продольными скоростями в полоидальном электрическом поле. В следующем приближении поток ионов совпадает с потоком электронов и по порядку величины:

$$\langle \langle \Gamma_i \rangle \rangle = \langle \langle \Gamma_e \rangle \rangle \sim -\rho_{ce}^2 \frac{\Theta V_{Te}}{r} q^2 \frac{\partial n}{\partial r}. \quad (13.118)$$

Чтобы получить точное выражение при вычислении потока, необходимо учесть отличие функции распределения  $f_{0e}$  от максвелловской, возникающее из-за протекания тока по плазме. Этот эффект обсуждается ниже для бананового режима.

При вычислении ионного теплового потока через магнитную поверхность по формуле

$$\begin{aligned}
 & \langle\langle q_{1i} \rangle\rangle = \\
 = & \left\langle\left\langle [d\vec{V}_i(V_{i\perp}^2 + V_{i\parallel}^2)] \left[ -\frac{cm_i \varepsilon (V_{i\perp}^2/2 + V_{i\parallel}^2) \sin \theta}{eBr} - \frac{c}{eBr} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right] (f_{0i} + f_{1i}) \right\rangle\right\rangle \\
 & \quad (13.119)
 \end{aligned}$$

может показаться, что полоидальное электрическое поле дает вклад в соответствующий поток. Однако следует иметь в виду, что полоидальное поле совершает работу, так как имеются пфирш-шлютеровские потоки ионов, которые меняют тепловой поток на величину

$$\langle\langle q_{2i} \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \frac{e\Theta}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} n u_{i\parallel} \right\rangle\right\rangle. \quad (13.120)$$

В итоге, так же как и для потока частиц, полоидальное электрическое поле и частицы с большими полоидальными скоростями не дают вклада в результирующий поток тепла:

$$\begin{aligned}
 & \langle\langle q_i \rangle\rangle = \langle\langle q_{i1} + q_{i2} \rangle\rangle = \\
 = & \left\langle\left\langle [d\vec{V}_i \pi \delta(V_0 + \Theta V_{i\parallel})] \frac{m_i}{2} (V_{i\perp}^2 + V_{i\parallel}^2) \frac{cm_j \varepsilon (V_{i\perp}^2/2 + V_{i\parallel}^2) \sin \theta}{eBr} \hat{A}_i f_{0i} \right\rangle\right\rangle. \\
 & \quad (13.121)
 \end{aligned}$$

С учетом (13.114)

$$\langle\langle q_i \rangle\rangle = -3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^2 c^2 m_i^2 T_{0i}^{3/2}}{\Theta r e^2 B_0^2} n_0 \frac{dT_{0i}}{dr}. \quad (13.122)$$

### Банановый режим

Рассмотрим качественно, как выглядит функция распределения частиц. При  $v_j \rightarrow 0$  функция распределения есть функция интегралов движения и сохраняется вдоль траектории. При этом, из-за различия в топологиях траекторий, функция распределения частиц в неоднородной плазме имеет разрыв производной. Учет столкновений приводит к сглаживанию переходной области. Ионы, летящие на внешнем обводе в положительном направлении по банановой траектории, приходят в эту точку из

внутренних областей. Поэтому количество таких ионов превосходит количество ионов, летящих в отрицательном направлении, на величину

$$\Delta n_i \sim -\frac{dn_{0i}}{dr} \Delta r_i, \quad (13.123)$$

где ширина банана  $\Delta r_i$  дается оценкой (13.79). Следовательно, в области запертых частиц  $V_{\parallel} = -V_0/\Theta \pm \sqrt{\varepsilon} V_{Ti}$  производная функции распределения  $\partial f_i / \partial V_{\parallel} > 0$  (рис. 13.10). Производная функции распределения в этой области может быть найдена из оценки

$$\frac{\Delta n_i}{n} \sim \frac{\Delta f_i}{f_i} \sim \frac{\partial f_i}{\partial V_{\parallel}} \bigg|_{V_{\parallel} = -V_0/\Theta} \frac{\sqrt{\varepsilon} V_{Ti}}{f_i}. \quad (13.124)$$

Обмен импульсом в результате столкновений наиболее эффективно происходит между запертыми и пролетными частицами. Поэтому ионная функция распределения должна быть похожа на максвелловскую (при  $dT_{0i}/dr = 0$  просто совпадает с ней). Используя это обстоятельство, заменим

$$\frac{\partial f_i}{\partial V_{\parallel}} \bigg|_{V_{\parallel} = -V_0/\Theta} = -\frac{f_i m_i}{T_i} (V_{\parallel} - \bar{U}_{\parallel}) \bigg|_{V_{\parallel} = -V_0/\Theta} = \frac{f_i m_i}{\Theta T_i} (V_0 + \Theta \bar{U}_{\parallel}). \quad (13.125)$$

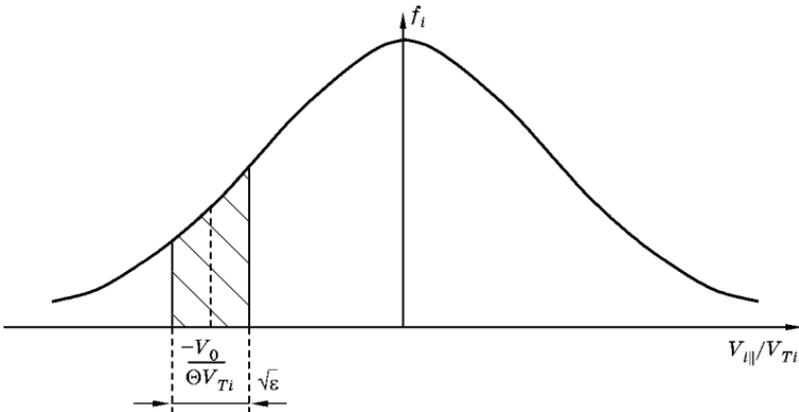


Рис. 13.10

Функция распределения ионов в банановом режиме

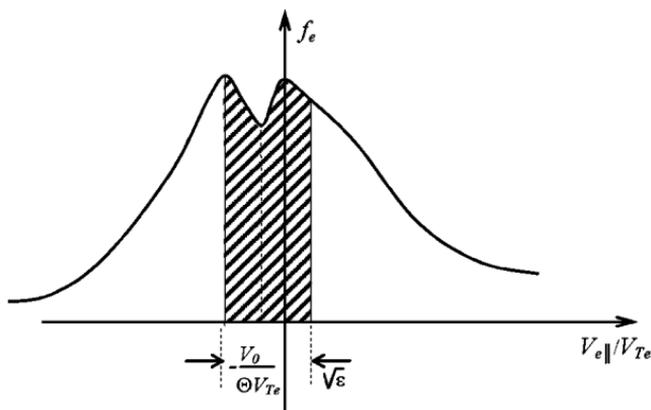


Рис. 13.11

Функция распределения электронов в банановом режиме

Комбинируя с (13.123) и (13.124), найдем величину  $V_0$ . Соответствующее радиальное электрическое поле при этом получается порядка (13.62), как и в других режимах.

Таким образом, требование того, чтобы функция распределения была, с одной стороны, близкой к максвелловской (точнее говоря, обращала в ноль обусловленный столкновениями поток ионов в пространстве скоростей), а с другой стороны, сохранялась вдоль траекторий в области малых скоростей, определяет электрическое поле.

Вертикальный  $\nabla B$  дрейф электронов направлен вверх, поэтому вблизи  $-V_0/\Theta$  больше электронов с отрицательным значением скорости и производная функции распределения здесь отрицательна. В то же время при больших значениях параллельной скорости функция распределения электронов должна переходить в максвелловскую, привязанную к ионной электрон-ионными столкновениями. В результате функция распределения электронов имеет вид, приведенный на рис. 13.11. Изломы функции распределения соответствуют переходу от запертых частиц к пролетным. Запертые электроны имеют направленную скорость относительно ионов порядка  $cT_0/\Theta eBr$  (считаем  $T_e \sim T_i \sim T$ ). С учетом их доли  $\sim \sqrt{\epsilon}$  от общего числа электронов по плазме протекает ток

$$j_{\parallel} \sim n_0 \sqrt{\epsilon} c T_0 / \Theta e B r, \quad (13.126)$$

зависящий от градиентов концентраций, электронной и ионной температур. Кроме того, есть ток  $j_{2\parallel}$ , возникающий из-за столкновений между запертыми и пролетными электронами, которые смещают все тело функции распределения относительно ионов. Из баланса сил трения

$$m_e v_{ei} j_{2\parallel} / e - m_e v_{ee} j_{1\parallel} / e n_0 = 0 \quad (13.127)$$

получаем, что  $j_{1\parallel} \sim j_{2\parallel}$ . Оба тока оказываются одного порядка и образуют бут-стрэп ток  $j_b$ , который зависит от градиентов концентрации и температур частиц. По порядку величины

$$j_B \sim n_0 \sqrt{\varepsilon c T_0} / \Theta e B r. \quad (13.128)$$

Бут-стрэп ток направлен вдоль тока по плазме.

Особенности функции распределения электронов приводят и к уменьшению обычного тока проводимости, вызванного вихревым тороидальным электрическим полем. Так как запертые частицы не участвуют в процессе проводимости, то

$$\sigma_{\parallel}^{NEO} = \sigma_{\parallel} (1 - \alpha \sqrt{\varepsilon}), \quad (13.129)$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент.

### 13.5. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ЧАСТИЦ И ТЕПЛА

Приведем для справки аппроксимационные выражения, справедливые для всех режимов столкновительности. Столкновительный параметр определим как

$$v_{*j} = \frac{v_j m_j^{1/2} q R}{T_j^{1/2} \varepsilon^{3/2}}. \quad (13.130)$$

Поток частиц имеет вид

$$\langle\langle \Gamma \rangle\rangle = \Gamma_1 + \Gamma_2;$$

$$\Gamma_1 = \frac{2n_0 \sqrt{\varepsilon} T_{0e} m_e c^2 v_e}{e^2 B_0^2 \Theta^2} (K_{11} A_e + K_{12} \frac{d \ln T_{0e}}{dr});$$

$$A_e = \frac{d \ln(n T_{0e})}{dr} - \frac{5}{2} \frac{d \ln T_{0e}}{dr} + \frac{T_{0i}}{T_{0e}} \left[ \frac{d \ln(n T_{0e})}{dr} - \frac{1 - k_T}{1 + v_{*e}^2 \varepsilon^2} \frac{d \ln T_{0i}}{dr} \right];$$

$$\Gamma_2 = -K_{13} n_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{c}{B_0 \Theta} E_T, \quad (13.131)$$

где

$$K_{mn} = K_{mn}^0 \left[ \frac{1}{1 + a_{mn} v_{*e}^{1/2} + b_{mn} v_{*e}} + \frac{\varepsilon^3 v_{*e} c_{mn}^2 / b_{mn}}{1 + c_{mn} v_{*e} \varepsilon^{3/2}} \right]$$

для  $m$  и  $n$  от 1 до 2,

$$K_{m3} = K_{m3}^0 \frac{1}{(1 + c_{m3} v_{*e} \varepsilon^{3/2})(1 + a_{m3} v_{*e}^{1/2} + b_{m3} v_{*e})}.$$

Значения коэффициентов приведены в таблице.

$mn$	$K_{mn}^0$	$a_{mn}$	$b_{mn}$	$c_{mn}$
11	1,04	2,01	1,53	0,89
12	1,2	0,75	0,67	0,56
22	2,55	0,45	0,43	0,43
13	2,3	1,02	1,07	1,07
23	4,19	0,57	0,61	0,61
33	1,83	0,68	0,32	0,66

Электронный поток тепла:

$$\begin{aligned} \langle\langle q_e \rangle\rangle + \frac{5}{2} \langle\langle \Gamma \rangle\rangle T_{0e} = & - \frac{2n_0 \sqrt{\varepsilon} T_{0e}^2 m_e c^2 v_e}{e^2 B_0^2 \Theta^2} \left( K_{12} A_e + K_{22} \frac{d \ln T_{0e}}{dr} \right) - \\ & - K_{23} n_0 T_{0e} \sqrt{\varepsilon} \frac{c}{B_0 \Theta} E_T. \end{aligned} \quad (13.132)$$

Продольный ток:

$$j_{\parallel} = - \frac{n_0 \sqrt{\varepsilon} T_{0e} c}{\Theta B_0} \left( K_{13} A_e + K_{23} \frac{d \ln T_{0e}}{dr} \right) - \sigma_{\parallel} E_T (1 - K_{33} \sqrt{\varepsilon}). \quad (13.133)$$

Ионный поток тепла:

$$\begin{aligned} \langle\langle q_i \rangle\rangle + \frac{5}{2} \langle\langle \Gamma \rangle\rangle T_{0i} = \\ = -2K_2 \frac{n_0 \sqrt{\varepsilon} T_{0i}^2 m_i c^2 v_i}{e^2 B_0^2 \Theta^2} \frac{d \ln T_{0i}}{dr} + T_{0i} \langle\langle \Gamma \rangle\rangle \left[ \frac{5}{2} - \frac{1 - k_T}{1 + v_{*i}^2 \varepsilon^3} \right]. \end{aligned} \quad (13.134)$$

Здесь

$$K_2 = 0,66 \left( \frac{1}{1 + 1,03 v_{*i}^{1/2} + 0,31 v_{*i}} + \frac{1,77 \varepsilon^3 v_{*i}}{1 + 0,74 v_{*i} \varepsilon^{3/2}} \right). \quad (13.135)$$

Неоклассическое радиальное электрическое поле:

$$E_r = \frac{T_{0i}}{en} \frac{\partial n}{\partial r} + k_T \frac{1}{e} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r} + B_p^0 \bar{U}_{\parallel}, \quad (13.136)$$

где

$$k_T = \frac{-0,17 + 1,05 v_{*i}^{1/2} + 3,1 v_{*i}^2 \varepsilon^3}{(1 + 0,7 v_{*i}^{1/2})(1 + v_{*i}^2 \varepsilon^3)}. \quad (13.137)$$

Уравнение баланса частиц имеет вид

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle \langle \Gamma \rangle \rangle) = I - R, \quad (13.138)$$

где  $I$  и  $R$  — члены, описывающие рождение и уничтожение частиц.

Уравнения баланса тепла:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial (n_0 T_{0e})}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \langle \langle q_e \rangle \rangle + \frac{5}{2} \langle \langle \Gamma \rangle \rangle T_{0e} \right) &= Q_e, \\ \frac{3}{2} \frac{\partial (n_0 T_{0i})}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \langle \langle q_i \rangle \rangle + \frac{5}{2} \langle \langle \Gamma \rangle \rangle T_{0i} \right) &= Q_i. \end{aligned} \quad (13.139)$$

Источники в правых частях в отсутствие дополнительного нагрева:

$$\begin{aligned} Q_e &= j_{\parallel} E_T - Q_{\Delta} - e \tilde{E}_r \langle \langle \Gamma \rangle \rangle, \\ Q_i &= Q_{\Delta} + e \tilde{E}_r \langle \langle \Gamma \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (13.140)$$

Здесь величина  $Q_{\Delta}$  представляет собой теплообмен между электронами и ионами:

$$Q_{\Delta} = 3 \frac{m_e}{m_i} n v_e (T_{e0} - T_{i0}), \quad (13.141)$$

а величина  $\tilde{E}_r$  — электрическое поле в движущейся с тороидальной скоростью системе отсчета:

$$\tilde{E}_r = E_r - B_p^0 \bar{U}_{\parallel} = \frac{T_{0i}}{en} \frac{\partial n}{\partial r} + k_T \frac{1}{e} \frac{\partial T_{0i}}{\partial r}. \quad (13.142)$$

Дополнительные члены в правых частях уравнений баланса тепла представляют собой работу радиального электрического поля, остальные работы электрических полей и силы трения учтены при вычислении  $\langle \langle q_i \rangle \rangle$ .

Следует иметь в виду, что в реальном токамаке турбулентные потоки частиц и тепла могут значительно

превосходить неоклассические значения. В особенности это относится к потокам частиц и электронному потоку тепла. В этом случае вид уравнений (13.138) и (13.139) сохраняется. Исключение может составлять выражение для работы электрического поля, так как часть работы электрического поля и силы трения может быть учтена при интегрировании по магнитной поверхности.

В случае магнитных поверхностей произвольной формы необходимо перейти к поверхностным координатам, описанным в разделе 12.7. Локальное уравнение непрерывности в этих координатах имеет вид

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\sqrt{g}}{h_a} \Gamma_a \right) = I - R, \quad (13.143)$$

где  $\sqrt{g} = h_a h_\theta h_\zeta$ . Умножим это уравнение на  $\sqrt{g}$  и проинтегрируем по полоидальной и тороидальной координатам. Считая в первом приближении концентрацию постоянной вдоль магнитной поверхности, получим в первом члене в левой части

$$\frac{\partial (\oint \sqrt{g} n_0 d\theta d\zeta)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [V'(a) n_0],$$

где  $V$  — объем внутри данной магнитной поверхности, а производная  $V'(a)$  — объем между соседними магнитными поверхностями. Во втором члене получается полный поток через магнитную поверхность. Умножив и разделив его на  $V'(a)$ , перепишем второе слагаемое в виде

$$\oint \frac{\sqrt{g}}{h_a} \Gamma d\theta d\zeta = V'(a) \langle \vec{\Gamma} \nabla a \rangle.$$

Здесь скобки « $\langle \rangle$ » означают усреднение по объему (13.55). В результате усредненное уравнение баланса частиц принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [V'(a) n_0] + \frac{\partial}{\partial a} [V'(a) \langle \vec{\Gamma} \nabla a \rangle] = V'(a) (I - R). \quad (13.144)$$

В качестве поверхностной координаты  $a$  можно, в частности, выбрать эквивалентный радиус магнитной поверхности  $\rho$ , определенный через тороидальный магнитный

поток согласно  $\pi r^2 B_T^0 = \Psi_T$ . Тогда (13.144) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [V'(\rho)n_0] + \frac{\partial}{\partial \rho} [V'(\rho)\langle \tilde{\Gamma} \nabla \rho \rangle] = V'(\rho)(I - R). \quad (13.145)$$

Для круглых магнитных поверхностей  $\rho = r$ ,  $V'(r) \sim r$  и (13.145) переходит в (13.38).

Уравнения баланса тепла в общем случае:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial [V'(\rho)n_0 T_{0e}]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( V'(\rho) (\langle \tilde{q}_e \nabla \rho \rangle + \frac{5}{2} \langle \tilde{\Gamma} \nabla \rho \rangle T_{0e}) \right) &= V'(\rho) Q_e, \\ \frac{3}{2} \frac{\partial [V'(\rho)n_0 T_{0i}]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( V'(\rho) (\langle \tilde{q}_i \nabla \rho \rangle + \frac{5}{2} \langle \tilde{\Gamma} \nabla \rho \rangle T_{0i}) \right) &= V'(\rho) Q_i. \end{aligned} \quad (13.146)$$

Выражение для локального радиального электрического поля:

$$E_a = \frac{T_{0i}}{e} \left( \left( \frac{1}{h_a} \frac{d \ln n}{da} + k_T \frac{1}{h_a} \frac{d \ln T_i}{da} \right) - \frac{B_0}{B} \langle B V_{\parallel} \rangle \right). \quad (13.147)$$

---

## Глава 14. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**В** этой главе рассмотрены вопросы устойчивости плазмы в предположении, что выполнены условия равновесия в магнитном поле. Наибольшую опасность для магнитного удержания представляют крупномасштабные магнитогидродинамические неустойчивости (МГД), которые могут быть описаны в рамках МГД-уравнений. Существует и целый ряд других неустойчивостей, связанных с конечной проводимостью плазмы и ее неоднородностью. К таким неустойчивостям относятся, в частности, дрейфовые неустойчивости, проанализированные в главе 8.

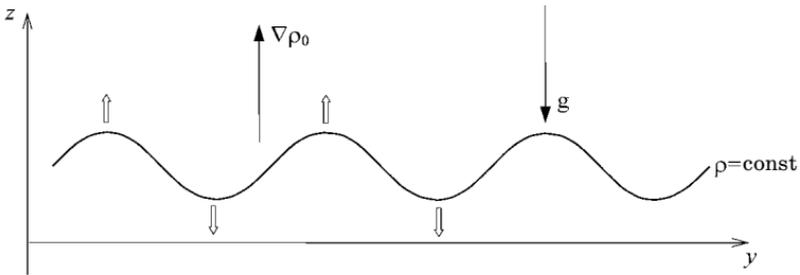
Первый класс МГД-неустойчивостей во многом аналогичен неустойчивости в жидкости, с которой и начнем рассмотрение.

### 14.1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА В ЖИДКОСТИ

Рассмотрим жидкость в поле силы тяжести (рис. 14.1). Пусть плотность жидкости  $\rho_0$  меняется с высотой,  $\rho_0 = \rho_0(z)$ . В равновесии сила тяжести должна быть уравновешена градиентом давления:

$$-\frac{dp_0}{dz} - \rho_0 g = 0. \quad (14.1)$$

Покажем, что равновесие является неустойчивым, если плотность жидкости нарастает с высотой (тяжелая жидкость на легкой). В этом случае развивается неустойчивость Рэлея — Тейлора. Обратная же ситуация является устойчивой. Физическая причина неустойчивости



**Рис. 14.1**  
Тяжелая жидкость на легкой неустойчива:  
неустойчивость Рэлея — Тэйлора

связана с тем, что при возникновении периодического в направлении  $y$  возмущения плотности тяжелая жидкость «продавливается» вниз, а легкая «всплывает» вверх, в результате чего малое возмущение нарастает. Так, например, выливается вода из перевернутого стакана.

Эволюция малых возмущений описывается системой уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \nabla p &= 0, \\ \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} \right] &= -\nabla p + \rho \vec{g}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Возмущенные величины будем искать в виде волны:

$$\begin{aligned} \rho^1 &= \alpha(z) \exp(-i\omega t +iky), \\ \vec{u}^1 &= \vec{\beta}(z) \exp(-i\omega t +iky), \\ p^1 &= \gamma(z) \exp(-i\omega t +iky). \end{aligned} \quad (14.3)$$

Амплитуды возмущений являются здесь неизвестной функцией координаты  $z$ . Линеаризованная система (14.2) имеет вид

$$\begin{aligned} ik u_y^1 + \frac{\partial u_z^1}{\partial z} &= 0, \\ -i\omega \rho^1 + u_z^1 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0, \\ -i\omega \rho_0 u_y^1 &= -ik p^1, \\ -i\omega \rho^0 u_z^1 &= -\frac{\partial p^1}{\partial z} - \rho^1 g. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Выражаем  $u_y^1$  из первого уравнения и подставляем в третье, а затем выражаем  $p^1$  из третьего уравнения и подставляем в последнее уравнение. Выражаем  $\rho^1$  из второго уравнения и также подставляем в последнее уравнение. В результате получаем

$$\omega^2 \frac{d}{dz} (\rho^0 \frac{du_z^1}{dz}) = k^2 (\rho^0 \omega^2 + g \frac{d\rho^0}{dz}) u_z^1. \quad (14.5)$$

Частная производная здесь заменена на полную, так как амплитуда скорости зависит только от  $z$ .

Для фиксированного волнового вектора  $k$  уравнение (14.5) соответствует задаче Штурма — Лиувилля на собственные функции и собственные значения с соответствующими граничными условиями. На границах  $z = 0, L$  условия соответствуют закрепленной или свободной границе:

$$\begin{aligned} u_z^1(z=0, L) &= 0; \\ \frac{du_z^1(z=0, L)}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Проанализировать устойчивость можно, не решая уравнение, следующим образом. Умножим обе части уравнения (14.5) на комплексно-сопряженное значение  $(u_z^1)^*$  и проинтегрируем вдоль  $z$  по всей области. Левую часть проинтегрируем по частям, при этом внеинтегральный член обращается в ноль для любого типа граничных условий. Для частоты получаем

$$-\omega^2 = \frac{g \int \frac{d\rho^0}{dz} |u_z^1|^2 dz}{\int \rho^0 \left( \frac{1}{k^2} \left| \frac{du_z^1}{dz} \right|^2 + |u_z^1|^2 \right) dz}. \quad (14.7)$$

Так как все величины за исключением производной  $d\rho^0/dz$  положительны, то знак частоты зависит от знака производной  $d\rho^0/dz$ . Если плотность монотонно нарастает вдоль  $z$  и  $d\rho^0/dz > 0$  при всех  $z$ , то квадрат частоты отрицателен:  $\omega^2 < 0$ . В этом случае  $\omega = \pm i\gamma$ , причем корень  $\omega = i\gamma$  соответствует раскачке неустойчивости. В обратном случае частота вещественна и такое равновесие устойчиво.

Для коротких волн  $k\lambda \gg 1$ , где  $\lambda$  — характерный масштаб изменения плотности  $\lambda = |d\ln\rho^0/dz|^{-1}$ , из (14.7) следует

$$-\omega^2 = \frac{g \int \frac{d\rho^0}{dz} |u_z^1|^2 dz}{\int \rho^0 (|u_z^1|^2) dz}. \quad (14.8)$$

В этом случае инкремент нарастания неустойчивости Рэлея — Тейлора при  $d\rho^0/dz > 0$  оказывается порядка  $\gamma \sim \sqrt{g/\lambda}$ . Если собственные функции сильно локализованы, то есть характерный масштаб их изменения существенно меньше  $\lambda$ , то  $\rho_0$  и  $d\rho^0/dz$  можно вынести из-под интеграла, и

$$\gamma = \sqrt{g/\lambda}. \quad (14.9)$$

Чтобы найти точное значение инкремента и собственные функции  $u_z^1$ , в общем случае необходимо решать уравнение (14.5). Покажем, как строится решение на примере экспоненциального профиля  $\rho^0 = \rho(0)\exp(z/\lambda)$ . Пусть граничные условия соответствуют закрепленной границе:  $u_z^1(z=0, L) = 0$ . Уравнение (14.5) сводится к

$$\omega^2 \frac{d^2 u_z^1}{dz^2} + \frac{\omega^2}{\lambda} \frac{du_z^1}{dz} - k^2 \left( \omega^2 + \frac{g}{\lambda} \right) u_z^1 = 0. \quad (14.10)$$

Ищем решение в виде  $u_z^1 = A \exp(bz)$ , где комплексное число  $b = b_1 + ib_2$ . После подстановки имеем

$$\omega^2 (b_1^2 + 2ib_1 b_2 - b_2^2) + \frac{\omega^2}{\lambda} (b_1 + ib_2) - k^2 \left( \omega^2 + \frac{g}{\lambda} \right) = 0. \quad (14.11)$$

Так как на границах скорость обращается в ноль, то  $b_2 = \pi n/L$ , где  $n$  — целое число. Так как частота вещественна, то, приравнявая к нулю мнимые члены, находим  $b_1 = -1/(2\lambda)$ . Характеристическое уравнение принимает вид

$$\omega^2 (b_1^2 - b_2^2) + \frac{\omega^2}{\lambda} b_1 - k^2 \left( \omega^2 + \frac{g}{\lambda} \right) = 0, \quad (14.12)$$

откуда находим инкремент неустойчивости:

$$\gamma^2 = -\omega^2 = \frac{k^2 g}{\lambda} \frac{1}{k^2 + \frac{1}{4\lambda^2} + \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2}. \quad (14.13)$$

Вещественные собственные функции при этом

$$u_z^1 = C \sin \frac{\pi n z}{L} \exp(-z/2\lambda) \cos ky \exp(\gamma t). \quad (14.14)$$

В частности, для коротких волн  $k\lambda \gg 1$ ,  $\gamma = \sqrt{g/\lambda}$ .

## 14.2. ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

В полностью ионизованной плазме в магнитном поле существует неустойчивость, аналогичная неустойчивости Рэля — Тейлора для жидкости. Она вызывается как силой тяжести, так и неоднородностью и кривизной силовых линий магнитного поля. Эту неустойчивость, относящуюся к классу неустойчивостей Рэля — Тейлора, называют желобковой или перестановочной неустойчивостью.

Пусть плазма находится в магнитном поле, параллельном оси  $x$ ,  $\vec{B} \parallel x$ , а сила тяжести направлена вдоль оси  $z$ . Плазма находится в равновесии, так что

$$-\frac{dp_0}{dz} - m_i n_0 g - j_y^0 B/c = 0. \quad (14.15)$$

Ограничимся случаем малых  $\beta$ , когда магнитное поле можно считать постоянным и не зависящим от  $z$ . Ток в направлении  $y$  представляет собой сумму диамагнитного

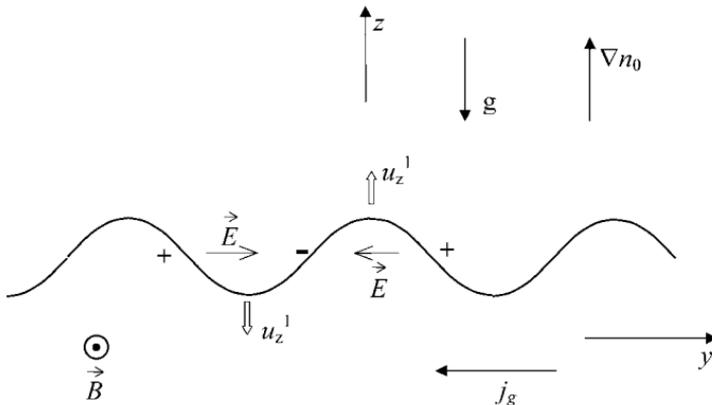


Рис. 14.2

Поляризация возмущений при желобковой неустойчивости

тока и тока  $j_g^0$ , вызванного силой тяжести. Ток  $j_g^0$  связан с дрейфом ионов (электронным дрейфом можно пренебречь из-за малой массы):  $j_g^0 = -cm_i gn_0 / B$ .

Механизм развития неустойчивости для коротких волн, область локализации которых вдоль  $z$  значительно меньше характерных размеров плазмы, иллюстрируется на рис. 14.2. При наличии периодического по  $y$  возмущения концентрации появляется возмущенный ток  $j_g^1 = -cm_i n^1 g / B$ . Чтобы его скомпенсировать, возникает нарастающее во времени электрическое поле, вызывающее поляризационный ток в противоположном направлении:  $j_p^1 = \frac{c^2 n_0 m_i}{B^2} \frac{\partial E_y^1}{\partial t}$ . Для коротких волн условие  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  сводится к равенству нулю возмущенного тока в направлении  $y$ :

$$j_g^1 + j_p^1 = -\frac{cm_i n^1 g}{B} + \frac{c^2 n_0 m_i}{B^2} \frac{\partial E_y^1}{\partial t} = 0. \quad (14.16)$$

Механизм формирования электрического поля полностью аналогичен рассмотренному в разделе 11.1 механизму поляризации сгустков. Электрическое поле вызывает вертикальный дрейф плазмы со скоростью

$$u_z^1 = -cE_y^1 / B. \quad (14.17)$$

Линеаризованное уравнение непрерывности с учетом несжимаемости дрейфовых потоков ( $\nabla \cdot ([\vec{E} \cdot \vec{B}] / B^2) = 0$ ) имеет вид

$$\frac{\partial n^1}{\partial t} + u_z^1 \frac{\partial n_0}{\partial z} = 0. \quad (14.18)$$

Для возмущений вида (14.3) из (14.16) имеем

$$E_y^1 = \frac{iBg}{\omega c} \frac{n^1}{n_0}. \quad (14.19)$$

Подставляя (14.17) и (14.19) в уравнение непрерывности с учетом  $\partial n^1 / \partial t = -i\omega n^1$ , получаем

$$-\omega^2 = g \frac{d \ln n_0}{dz}. \quad (14.20)$$

При  $d \ln n_0 / dz > 0$  плазма неустойчива с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{g / \lambda}, \quad (14.21)$$

где  $\lambda = |d \ln n_0 / dz|^{-1}$ . В обратном случае частота вещественна и плазма устойчива.

В общем случае развитие желобковой неустойчивости описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \bar{u}_e &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \bar{u}_i &= 0, \\ n m_i \frac{d \bar{u}_i}{dt} &= -\nabla p_i + e n \bar{E} + \frac{e n}{c} [\bar{u}_i \cdot \bar{B}] + m_i n \bar{g}, \\ -\nabla p_e - e n \bar{E} - \frac{e n}{c} [\bar{u}_e \cdot \bar{B}] &= 0. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Выразим поперечную скорость из уравнений баланса сил:

$$\begin{aligned} \bar{u}_e &= \frac{c[\bar{E} \cdot \bar{B}]}{B^2} + \frac{c[\nabla p_e \cdot \bar{B}]}{e n B^2}, \\ \bar{u}_i &= \frac{c[\bar{E} \cdot \bar{B}]}{B^2} - \frac{c[\nabla p_i \cdot \bar{B}]}{e n B^2} + \frac{c m_i [\bar{B} \cdot d \bar{u}_i / dt]}{e B^2} + \frac{c m_i [\bar{g} \cdot \bar{B}]}{e B^2}. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Так как дивергенция диамагнитных потоков в однородном магнитном поле равна нулю, а дрейфовые потоки несжимаемы, то уравнение непрерывности для электронов сводится к

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{u}_E \nabla n = 0, \quad (14.24)$$

где  $\bar{u}_E = c[\bar{E} \cdot \bar{B}] / B^2$  — скорость дрейфа. Выбирая в качестве второго уравнения  $\nabla \cdot \bar{j} = 0$ , получаем

$$\nabla \cdot n \left( \frac{c m_i [\bar{B} \cdot d \bar{u}_E / dt]}{B^2} + \frac{c m_i [\bar{g} \cdot \bar{B}]}{B^2} \right) = 0. \quad (14.25)$$

В поляризованном токе учтена в первом приближении только скорость электрического дрейфа. Линеаризованное уравнение непрерывности совпадает с (14.18) с учетом (14.17). Линеаризованное уравнение (14.25) имеет вид

$$i k \left( -\frac{c m_i n^1 g}{B} + \frac{c^2 n_0 m_i}{B^2} \frac{\partial E_y^1}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c^2 n_0 m_i}{B^2} \frac{\partial E_z^1}{\partial t} \right) = 0. \quad (14.26)$$

Исключая возмущение концентрации с помощью (14.18), получаем для возмущенного потенциала уравнение

$$\omega^2 \frac{d}{dz} \left( n_0 \frac{d\phi^1}{dz} \right) = k^2 \left( n_0 \omega^2 + g \frac{dn_0}{dz} \right) \phi^1. \quad (14.27)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (14.5), описывающим неустойчивость Рэля — Тейлора в жидкости, и анализ на устойчивость проводится так же, как в предыдущем разделе.

Таким образом, плазма в магнитном поле неустойчива, если сила тяжести направлена против градиента концентрации. В реальной плазме гораздо более важную роль играет эффективная «сила тяжести», связанная с неоднородностью магнитного поля и кривизной силовых линий магнитного поля (см. главу 11). Так, в токамаке это эффективное ускорение дается выражением (11.11). Инкремент неустойчивости остается порядка (14.21) с заменой  $g$  на эффективное ускорение:

$$g = \frac{2(T_e + T_i)}{m_i R}. \quad (14.28)$$

При развитии желобковой неустойчивости длина волны вдоль магнитного поля стремится к бесконечности, так что развивающиеся возмущения имеют форму желобков. Шир магнитного поля подавляет желобковую неустойчивость. Действительно, мода, которая при каком-либо значении  $z$  имеет  $k_{\parallel} = 0$ , при других значениях  $z$  имеет  $k_{\parallel} \neq 0$ . При этом положительные и отрицательные возмущения потенциала «закорачиваются», так как лежат на одной силовой линии.

В магнитных ловушках с замкнутыми силовыми линиями эффективное ускорение может менять знак на разных участках силовой линии. В токамаке, например, на внешнем обводе кривизна и градиент магнитного поля соответствуют раскачке неустойчивости, тогда как на внутреннем обводе знаки эффективного ускорения и градиента концентрации совпадают, что характерно для устойчивого равновесия. Чтобы проанализировать устойчивость в этой ситуации, рассмотрим силовую трубку в плазме с малым  $\beta$ . Трубка с плазмой стремится увеличить свой объем и переместиться в область, где ее объем может возрасти.

При таком перемещении не должно произойти искривления трубки, так как при этом возросла бы магнитная энергия, а значит, и полная энергия системы.

Для замкнутой силовой линии объем силовой трубки равен

$$V = \oint S dl = \oint BS \frac{dl}{B} = \Psi \oint \frac{dl}{B}, \quad (14.29)$$

где  $\Psi$  — магнитный поток в трубке, который сохраняется вдоль трубки и не меняется во времени. Определим величину

$$U = \oint \frac{dl}{B}. \quad (14.30)$$

Для незамкнутой силовой линии, лежащей на магнитной поверхности,

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \int \frac{dl}{B} \right), \quad (14.31)$$

где  $n$  — число оборотов. Так как трубка стремится увеличить свой объем, а следовательно, и пропорциональную ему величину  $U$ , то величина  $-U$  является аналогом потенциальной энергии. Интеграл  $U$  является поверхностной величиной, как и полное давление плазмы, поэтому можно считать  $p = p(U)$ . При небольшом смещении трубки без искривления изменение ее объема в соответствии с (14.29) равно  $\delta V/V = \delta U/U$ . Изменение давления в ней при адиабатическом процессе:

$$\delta p = -5/3 p \delta V/V = -5/3 p \delta U/U.$$

Вблизи трубки давление окружающей фоновой плазмы также меняется. Используя связь  $p = p(U)$ , имеем

$$p(U + \delta U) = p + \frac{dp}{dU} \delta U. \quad (14.32)$$

Если давление фоновой плазмы растет быстрее, чем давление в трубке, то трубка будет возвращена в равновесное состояние. Таким образом, условие устойчивости:

$$\frac{dp}{dU} > -\frac{5}{3} \frac{p}{U}. \quad (14.33)$$

Обычно правой частью в (14.33) можно пренебречь, особенно вблизи границы плазмы, поэтому условие устойчивости сводится к

$$\frac{dp}{dU} > 0. \quad (14.34)$$

Другими словами, плазма устойчива, если внутри плазмы, где давление возрастает, величина  $U$  также имеет максимум. Так как в этой области магнитное поле меньше, чем снаружи, то говорят, что плазма должна находиться в «магнитной яме». Отметим, что в токамаке «магнитная яма» существует из-за шафрановского сдвига внутренних магнитных поверхностей наружу в область меньшего магнитного поля. Поэтому в плазме токамака желобковая неустойчивость не развивается.

Существует, однако, модификация желобковой неустойчивости — так называемая баллонная мода. Возмущения баллонного типа не постоянны вдоль силовой линии, их амплитуда больше на внешнем обводе токамака в области неблагоприятной кривизны, где неустойчивость стремится развиваться, и меньше на внутреннем обводе, где неустойчивость подавляется. Баллонная неустойчивость развивается при конечном давлении плазмы и носит пороговый по давлению характер.

### 14.3. ДИССИПАТИВНЫЕ МОДИФИКАЦИИ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### 14.3.1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

В частично ионизованной плазме в магнитном поле существует диссипативный аналог желобковой неустойчивости (неустойчивости Рэлея — Тейлора). Она также вызывается как силой тяжести, так и неоднородностью и кривизной силовых линий магнитного поля.

Рассмотрим геометрию, представленную на рис. 14.2, и проведем анализ в локальном приближении. Будем считать плазму замагниченной, так что выполнено условие  $x_e x_i \gg 1$  (см. главу 5). В частично ионизованной плазме сила тяжести, так же как и в полностью ионизованной

плазме, вызывает ток вдоль оси  $y$ . При наличии периодического по  $y$  возмущения этот ток равен

$$j_g^1 = -b_{i\Lambda} m_i n^1 g. \quad (14.35)$$

Если ионы тоже замагничены,  $x_i \gg 1$ , то холловская подвижность  $b_{i\Lambda} = c/B$  и этот ток совпадает с током в полностью ионизованной плазме. В отличие от полностью ионизованной плазмы этот ток компенсируется не поляризационным током, а ионным током проводимости, если частота столкновений достаточно велика. Вместо (14.16) имеем

$$-b_{i\Lambda} m_i n^1 g + en_0 b_{i\perp} E_y^1 = 0. \quad (14.36)$$

Пренебрегаем диффузионным током  $en^1 D_{i\perp} k^2$ , что справедливо при условии (для замагниченных ионов)

$$\frac{T_i k^2}{m_i g} \frac{v_{iN}}{\omega_{ci}} \ll 1. \quad (14.37)$$

Из (14.36) находим возмущенное электрическое поле:

$$E_y^1 = \frac{m_i g}{e} \frac{b_{i\Lambda}}{b_{i\perp}} \frac{n^1}{n_0}. \quad (14.38)$$

Из уравнения непрерывности для электронов (14.18) с учетом (14.17) получаем

$$\omega = i \frac{g}{v_{iN}} \frac{d \ln n_0}{dz}. \quad (14.39)$$

При  $d \ln n_0 / dz > 0$  плазма неустойчива с инкрементом

$$\gamma = \frac{g}{v_{iN} \lambda}. \quad (14.40)$$

Неустойчивость Рэля — Тейлора в частично ионизованной плазме ответственна, например, за развитие пузырей плазмы в экваториальной области ионосферы.

### 14.3.2. ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

Если полностью ионизованная плазма ограничена металлическими стенками, перпендикулярными магнитному полю, то поляризация плазмы в значительной степени «закорачивается». Однако даже в бесстолкновительной

плазме из-за эффективного сопротивления пристеночного слоя остается поляризация, приводящая к развитию неустойчивости.

В направлении  $y$  возмущенный ток по-прежнему дается выражением (14.35). Интегрируя уравнение  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  вдоль оси  $x$  по всей области, ограниченной стенками, предполагая симметрию по  $x$ , получаем

$$ikI_g^1 + 2j_{\parallel}^1 = 0. \quad (14.41)$$

Здесь

$$I_g^1 = -\frac{cg}{m_i B} \int_0^L n^1 dx = -\frac{cg}{m_i B} N^1 \quad (14.42)$$

— интегральный возмущенный ток, а  $j_{\parallel}^1$  — плотность тока, вытекающего на стенку при  $x = L$ . Чтобы обеспечить вытекание токов на стенку, потенциал вблизи стенки возмущается. Возмущение потенциала соответствует вольт-амперной характеристике пристеночного слоя (3.26). Считая невозмущенный потенциал плавающим из линеаризованного уравнения (3.26), найдем

$$j_{\parallel}^1 = en_s c_s \frac{e\phi^1}{T_e}, \quad (14.43)$$

где  $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$  — скорость звука, а  $n_s$  — концентрация плазмы вблизи стенки. Из-за высокой проводимости это возмущение передается в плазму вдоль магнитного поля и не зависит от  $x$ . Дополнительно к потенциалу (14.43) в плазме существует больцмановский потенциал  $\phi_B = (T_e/e)\ln n$ , который обеспечивает продольный баланс сил. Вызванный им дрейф в скрещенных полях является бездивергентным и не дает вклада в уравнение непрерывности.

Уравнение непрерывности (14.18) имеет вид

$$-i\omega n^1 + \frac{ick\phi^1}{B} \frac{dn_0}{dz} = 0. \quad (14.44)$$

Полагаем для простоты, что невозмущенная концентрация факторизуется  $n_0 = n_{0x}(x)n_{0y}(z)$ , так что  $|d\ln n_0/dz|^{-1} = \lambda$  не зависит от  $x$ . Тогда, так как  $\phi^1 = \text{const}(x)$ , профиль возмущения в направлении  $x$  повторяет профиль  $n_0(x)$ . Комбинируя (14.41)–(14.44), получаем

$$\omega = \frac{i}{2} k^2 \rho_{ci}^2 \frac{L_x}{c_s} g \frac{d \ln n_0}{dz}, \quad (14.45)$$

где

$$L_x = \int_0^L n_0 dx / n_s, \quad \rho_{ci} = \frac{(T_e / m_i)^{1/2}}{\omega_{ci}}.$$

При  $d \ln n_0 / dz > 0$  плазма неустойчива с инкрементом

$$\gamma = \frac{g}{v_{eff} \lambda}, \quad v_{eff} = \frac{2}{k^2 \rho_{ci}^2} \frac{c_s}{L_x}. \quad (14.46)$$

### 14.3.3. ГРАВИТАЦИОННО-ДИССИПАТИВНАЯ ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Отметим, что существует еще диссипативная модификация желобковой неустойчивости, связанная с конечной проводимостью плазмы вдоль магнитного поля и конечной длиной волны вдоль  $\vec{B}$ . Эта неустойчивость реализуется, если желобковая неустойчивость с  $k_{\parallel} = 0$  не развивается, но имеются локальные условия для поляризации плазмы, например неблагоприятная кривизна магнитного поля. Анализ ее проводится аналогично предыдущим случаям, при этом в балансе токов учитывается продольный ток проводимости. Результирующая частота определяется из уравнения

$$\omega^2 + i \omega_s \omega_g + \omega_g^2 = 0, \quad (14.47)$$

где

$$\omega_s = \frac{k_x^2}{k_y^2} \frac{\omega_{ci} \omega_{ce}}{0,51 v_{ei}}, \quad \omega_g^2 = -\frac{g}{\lambda}. \quad (14.48)$$

При  $\omega_s \ll \omega_g$  имеем обычную желобковую неустойчивость, а при  $\omega_s \gg \omega_g$

$$\gamma = \frac{\omega_g^2}{\omega_s} \ll \omega_g. \quad (14.49)$$

## 14.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

В магнитогидродинамической теории устойчивости можно сформулировать общий принцип, основанный на энергетических соображениях. Введем смещение плазмы согласно

$$\bar{\xi} = \int_0^t \bar{u}(\bar{r}, t') dt', \quad (14.50)$$

где  $\bar{u}(\bar{r}, t)$  — скорость элемента объема при развитии неустойчивости.

Преобразуем линеаризованные уравнения МГД, используя смещение. Линеаризованное уравнение для магнитного поля в отсутствии столкновений имеет вид

$$\frac{\partial \bar{B}^1}{\partial t} = [\nabla \cdot [\bar{u}^1 \cdot \bar{B}^0]]. \quad (14.51)$$

Индекс «0» относится к равновесным значениям величин, а индекс «1» соответствует возмущенным величинам,  $\bar{u}^0 = 0$ . Интегрируя (14.51) по времени от 0 до  $t$  и учитывая, что  $\bar{B}^1(\bar{r}, t=0) = 0$ , получаем

$$\bar{B}^1(\bar{r}, t) = [\nabla \cdot [\bar{\xi} \cdot \bar{B}^0]]. \quad (14.52)$$

Запишем уравнения баланса тепла для электронов и ионов в адиабатическом приближении:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial (nT_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} nT_\alpha \bar{u}_\alpha \right) + nT_\alpha \nabla \cdot \bar{u}_\alpha = 0. \quad (14.53)$$

Складывая два уравнения, получим суммарное уравнение баланса тепла:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p \bar{u} \right) + p \nabla \cdot \bar{u} = 0. \quad (14.54)$$

После линеаризации

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p^1}{\partial t} + \frac{3}{2} \bar{u}^1 \nabla p^0 + \frac{5}{2} p^0 \nabla \cdot \bar{u}^1 = 0. \quad (14.55)$$

После интегрирования по времени с учетом

$$p^1(\bar{r}, t=0) = 0$$

имеем

$$p^1(\bar{r}, t) = -\bar{\xi} \nabla p^0 - \frac{5}{3} p^0 \nabla \cdot \bar{\xi}. \quad (14.56)$$

Наконец, преобразуем уравнение суммарного баланса сил:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [[\nabla \cdot \bar{B}] \cdot \bar{B}]. \quad (14.57)$$

После линеаризации

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial t} &= \rho^0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} = \\ &= -\nabla p^1 + \frac{1}{4\pi} [[\nabla \cdot \bar{B}^1] \cdot \bar{B}^0] + \frac{1}{4\pi} [[\nabla \cdot \bar{B}^0] \cdot \bar{B}^1]. \end{aligned} \quad (14.58)$$

После подстановки в правую часть (14.52) и (14.56) получаем

$$\rho^0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} = \hat{F}(\bar{\xi}). \quad (14.59)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}(\bar{\xi}) &= \nabla(\bar{\xi} \nabla p^0 + \frac{5}{3} p^0 \nabla \cdot \bar{\xi}) + \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \bar{B}^0 \cdot \text{rot}[\bar{\xi} \cdot \bar{B}^0]] + \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \text{rot}[\bar{\xi} \cdot \bar{B}^0] \cdot \bar{B}^0]. \end{aligned} \quad (14.60)$$

Уравнение (14.59) можно интерпретировать как уравнение Ньютона, а оператор  $\hat{F}(\bar{\xi})$  представляет собой силу, вызывающую смещение элемента плазмы. Умножим обе части уравнения (14.59) на  $\dot{\bar{\xi}}$  и проинтегрируем по объему:

$$\int \rho^0 \dot{\bar{\xi}} \ddot{\bar{\xi}} d\bar{r} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho^0 (\dot{\bar{\xi}})^2}{2} d\bar{r} = \int \dot{\bar{\xi}} \hat{F}(\bar{\xi}) d\bar{r}. \quad (14.61)$$

Величина

$$K = \int \frac{\rho^0 (\dot{\bar{\xi}})^2}{2} d\bar{r} \quad (14.62)$$

является кинетической энергией, связанной с развитием неустойчивости. Используя (14.60), можно показать, что интеграл в правой части (14.61) удовлетворяет свойству самосопряженности:

$$\int \dot{\bar{\eta}} \hat{F}(\bar{\xi}) d\bar{r} = \int \bar{\xi} \hat{F}(\bar{\eta}) d\bar{r}. \quad (14.63)$$

Отсюда следует соотношение

$$\int \dot{\bar{\xi}} \hat{F}(\bar{\xi}) d\bar{r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{\xi} \hat{F}(\bar{\xi}) d\bar{r}. \quad (14.64)$$

С учетом этого соотношения (14.61) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (K + \delta W) = 0, \quad (14.65)$$

где

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \xi \hat{F}(\xi) d\vec{r}. \quad (14.66)$$

Величина  $\delta W$  имеет смысл изменения потенциальной энергии системы. Если для какого-либо вида смещений  $\delta W < 0$ , то потенциальная энергия  $K$  нарастает и развивается неустойчивость. Если же  $\delta W > 0$  для любых смещений, то равновесие является устойчивым. Таким образом, энергетический принцип позволяет сводить анализ устойчивости к анализу знака величины  $\delta W$ .

### 14.5. ВИНТОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Если для желобковой неустойчивости источником энергии является тепловая энергия, то при развитии винтовой неустойчивости энергетическим резервуаром служит энергия магнитного поля. Рассмотрим

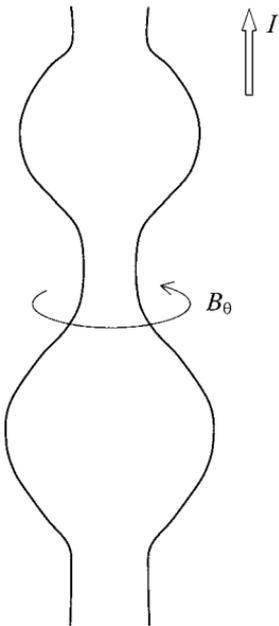


Рис. 14.3  
Возникновение  
перетяжек в зет-пинче

несколько простых примеров винтовой неустойчивости.

Пусть имеется бесконечный цилиндр, вытянутый вдоль оси  $z$ . По плазме протекает ток, а продольное магнитное поле отсутствует, так что плазма представляет собой равновесный зет-пинч, рассмотренный в главе 12. Такой пинч может быть неустойчив относительно радиальных возмущений:

$$\xi = A(r) \exp(-i\omega t + im\theta + ikz), \quad (14.67)$$

где  $m = k_0 r$  — целое число вследствие периодичности по угловой координате. Смещение элемента плазмы  $\xi$  здесь происходит в радиальном направлении. При  $m = 0$  возмущение азимутально симметрично и имеет характер перетяжек (рис. 14.3). В области перетяжки, где радиус шнура уменьшается, азимутальное

магнитное поле нарастает, так как полный ток  $I$  сохраняется и на границе шнура  $B_\theta \sim r^{-1}$ . Поэтому возрастает и сила Ампера, пропорциональная  $IB_\theta$ , которая сжимает плазму и приводит к нарастанию возмущений. При этом нарастает и давление плазмы внутри перетяжки, но не так сильно, так как может выравниваться вдоль шнура.

Чтобы исследовать винтовую неустойчивость с  $m = 0$  количественно, воспользуемся энергетическим принципом. Будем считать, что пинч по радиусу ограничен металлической стенкой, чтобы исключить из рассмотрения вакуумную область. Условие  $\delta W > 0$  устойчивости (14.66) для радиальных возмущений с  $m = 0$  упрощается. Интегрируя по частям, перепишем (14.66) в виде

$$\delta W = \int \left[ \left( \frac{5}{3} p^0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \right) (\nabla \cdot \bar{\xi})^2 - \frac{B_0^2}{\pi r} \xi \nabla \cdot \bar{\xi} + \frac{2}{r} \xi^2 \left( \frac{dp^0}{dr} + \frac{B_0^2}{2\pi r} \right) \right] d\bar{r} > 0. \quad (14.68)$$

Здесь

$$\nabla \cdot \bar{\xi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi).$$

Выделим в подынтегральном выражении полный квадрат:

$$\begin{aligned} \delta W = \int \left( \frac{5}{3} p^0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \right) & \left[ (\nabla \cdot \bar{\xi}) - \frac{\frac{B_0^2}{\pi r}}{2 \left( \frac{5}{3} p^0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \right)} \xi \right]^2 d\bar{r} + \\ & + \int \left[ - \frac{\left( \frac{B_0^2}{\pi r} \right)^2 \xi^2}{4 \left( \frac{5}{3} p^0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \right)} + \frac{2}{r} \xi^2 \left( \frac{dp^0}{dr} + \frac{B_0^2}{2\pi r} \right) \right] d\bar{r} > 0. \quad (14.69) \end{aligned}$$

Первый интеграл положителен, поэтому неравенство (14.69) выполняется, если второй интеграл также положителен, чему соответствует условие

$$-\frac{r}{p^0} \frac{dp^0}{dr} < \frac{10/3}{1 + \frac{5}{6}\beta}, \quad (14.70)$$

где  $\beta = 8\pi p^0 / B_0^2$ . Таким образом, неравенство (14.70) представляет собой условие устойчивости для моды с  $m = 0$ .

Продольное магнитное поле стабилизирует моду  $m = 0$ , так как силовые линии сжимаются вместе с плазмой и магнитное давление, связанное с продольным полем, нарастает. При этом, однако, может раскачиваться мода  $m = 1$ . Рассмотрим, как происходит развитие неустойчивости  $m = 1$  для тонкого шнура с током, помещенного в продольное магнитное поле. При возмущениях с  $m = 1$  шнур изгибается, как показано на рис. 14.4. При этом из-за того, что ток течет вдоль шнура, появляется азимутальная составляющая тока и радиальная сила Лоренца  $j_0 B_z / c$ , которая и приводит к нарастанию возмущений. Величина азимутального тока зависит как от радиального смещения, так и от шага спирали по  $z$ . Уравнение радиального баланса сил имеет вид

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{1}{c} j_0 B_z = \frac{1}{c} j_{\parallel} B_z k \xi. \quad (14.71)$$

Отсюда следует выражение для инкремента неустойчивости:

$$\gamma = \left( \frac{I k B_z}{\pi a^2 c \rho} \right)^{1/2}. \quad (14.72)$$

Выражая ток через создаваемое им азимутальное магнитное поле, получаем

$$\gamma = \frac{c_A}{a} (2\Theta k a)^{1/2}, \quad (14.73)$$

где  $a$  — радиус шнура,  $\Theta = B_0 / B_z$ , а  $c_A = B_z / (4\pi\rho)^{1/2}$  — альфвеновская скорость, рассчитанная по полю  $B_z$ . Таким образом, характерное время развития винтовой неустойчивости определяется альфвеновским временем в отличие от желобковой неустойчивости, где определяющим является время, соответствующее скорости звука.

Чтобы найти критерий устойчивости реального шнура с током конечной толщины относительно моды  $m = 1$ , рассмотрим следующую упрощенную модель: пусть на плазменный шнур наложено винтовое возмущение, которое

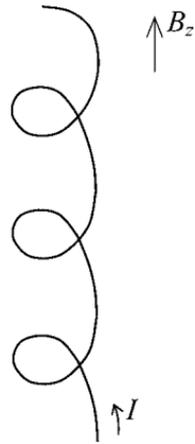


Рис. 14.4  
Неустойчивость моды  $m = 1$  для тонкого шнура с током

не изменяет его формы. Рассмотрим два поперечных сечения шнура, отстоящих друг от друга на четверть длины волны (рис. 14.5). Пусть при некотором значении  $z = 0$  шнур смещается влево (пунктир), тогда на расстоянии  $z = \lambda/4$  смещение шнура должно быть направлено вниз. Рассмотрим ситуацию, когда на расстоянии  $z = \lambda/4$  силовая линия проворачивается в азимутальном направлении на угол, больший, чем  $\pi/2$ . Так как магнитное поле вложено в плазму, то силовая линия относительно центра возмущенного шнура (пунктир) проворачивается в азимутальном направлении на тот же угол. В то же время относительно центра невозмущенного шнура силовая линия проворачивается на больший угол. Чтобы обеспечить поворот на больший угол, азимутальное магнитное поле на верхней стороне шнура должно возрасти по отношению к равновесному значению. При этом увеличивается и магнитное давление, которое увеличивает смещение шнура вниз, что и приводит к дальнейшему нарастанию неустойчивости. В обратном же случае, когда силовая линия проворачивается на длине  $\lambda/4$  на угол, меньший  $\pi/2$ , шнур устойчив. Определим запас устойчивости для цилиндрического шнура как

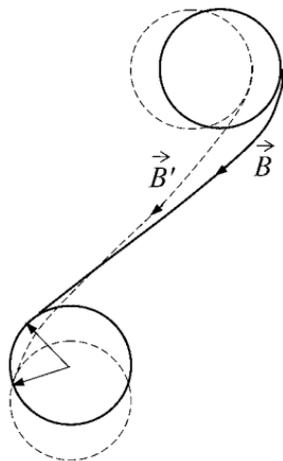
$$q(a) = \frac{B_z}{B_0} \frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{B_z k a}{B_0}. \quad (14.74)$$

Тогда условие устойчивости шнура соответствует

$$q > 1. \quad (14.75)$$

Это неравенство известно как условие устойчивости Крускала — Шафранова.

Для моды  $m \geq 2$  проведем следующее рассуждение: развернем поверхность шнура в прямоугольник (рис. 14.6). Ось ординат соответствует координате  $z$ , а ось абсцисс — азимутальному углу  $\theta$ . Ра-



**Рис. 14.5**  
Смещение сечений толстого плазменного шнура, отстоящих на  $\lambda/4$ , при развитии винтовой неустойчивости с  $m = 1$

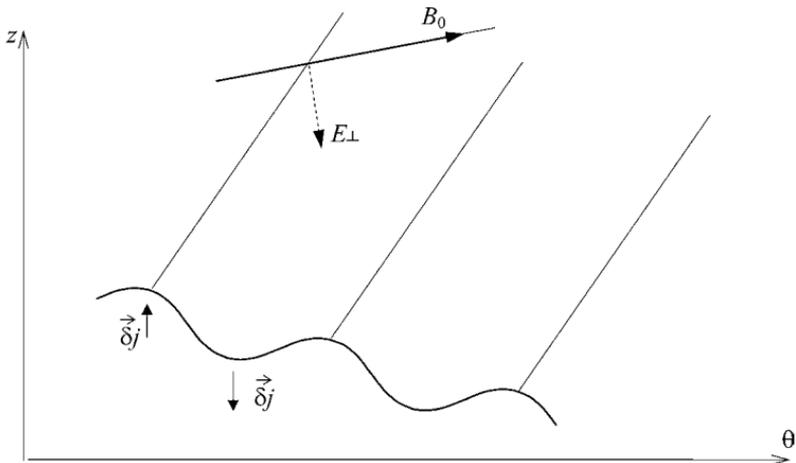


Рис. 14.6

Линии постоянной фазы радиального смещения и силовые линии магнитного поля в плоскости  $(z, \theta)$ . Ситуация соответствует развитию неустойчивости.

диальные возмущения смещают границу шнура, образуя рифленую поверхность, изображенную на рис. 14.6. Вместе с радиальными возмущениями по радиусу смещается и продольный ток. Возмущения плотности тока на поверхности шнура приводят к появлению радиального компонента магнитного поля  $B_r^1$ . Переменное во времени радиальное магнитное поле наводит вихревое электрическое поле. В силу высокой проводимости плазмы это наведенное электрическое поле должно быть практически перпендикулярным магнитному полю. Это поле и вызывает смещение элемента плазмы по радиусу из-за дрейфа в скрещенных полях. Связь между смещением и возмущением магнитного поля дается согласно (14.52) соотношением  $B_r^1 \sim iB_z \xi k_{\parallel} \approx i\xi(kB_z - mB_0/a)$ . В этом выражении знак радиального магнитного поля должен быть отрицателен — то есть соответствовать смещению тока наружу. Другими словами, наведенное поперечное электрическое поле должно вызывать дрейф плазмы наружу, увеличивая смещение (рис. 14.6). В обратном случае плазма устойчива, так что критерий устойчивости имеет вид  $q > m$ . Если цилиндр имеет конечную длину  $L$ , то  $k = 2\pi n/L$ . В частности,

для тора радиуса  $R$  величина  $k = n/R$ . В этом случае условие устойчивости имеет вид

$$q(a) = \frac{B_z a}{B_0 R} > \frac{m}{n}. \quad (14.76)$$

Условие (14.76) должно иметь место на границе шнура. Если плотность тока постоянна по шнуру, то азимутальное поле линейно растет с радиусом и значение  $q$  постоянно по шнуру. В этом модельном случае условие (14.76) может быть выполнено во всем объеме шнура. При любом более реалистичном профиле тока значение запаса устойчивости зависит от радиуса. При этом внутри шнура существует много поверхностей с радиусом  $r = r_{res}$ , на которых

$$q(r_{res}) = \frac{m}{n}. \quad (14.77)$$

Соответствующие магнитные поверхности называются резонансными магнитными поверхностями. На самой резонансной магнитной поверхности винтовая мода нейтрально устойчива, а с разных сторон от нее из-за зависимости  $q(r)$  условие  $q(r) > m/n$  с одной стороны выполняется, а с другой стороны не выполняется. Устойчивость в этом случае зависит от скорости изменения запаса устойчивости по радиусу, то есть от величины шира магнитного поля.

Для оценки необходимой величины шира приведем следующее упрощенное рассуждение: рассмотрим моду, локализованную около резонансной магнитной поверхности. Возмущение давления при смещениях согласно (14.56) есть  $p^1 \sim -\xi dp/dr$ . С возмущением давления и кривизной силовых линий  $R_S = rB_z/B_0$  связана дестабилизирующая сила:

$$F_1 \sim -\frac{dp}{dr} \frac{\xi}{R_s}, \quad (14.78)$$

которая стремится вытолкнуть плазму наружу. Эта сила уравнивается натяжением силовых линий, связанным с их деформацией. Стабилизирующая сила оценивается как

$$F_2 = \frac{(\bar{B}\nabla)\bar{B}}{4\pi} \sim \frac{iB_z k_{\parallel} B_r^1}{4\pi}. \quad (14.79)$$

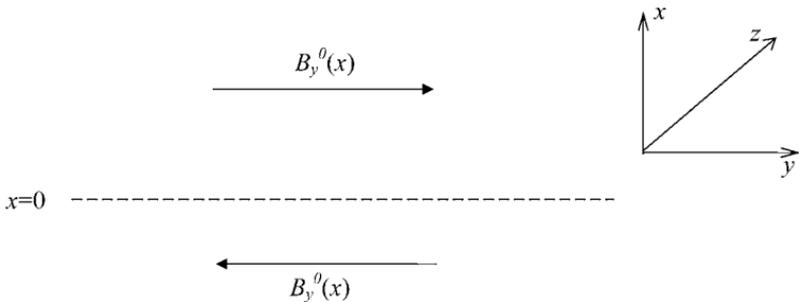
Используем соотношение (14.52)  $B_r^1 \sim iB_z \xi k_{\parallel}$  и разложение  $k_{\parallel}$  в ряд вблизи резонансной магнитной поверхности (8.71)  $k_{\parallel}(r) = k_0 \Theta(r - r_{res}) / r_{res}$ , где  $\Theta$  — введенный в главе 8 шир магнитного поля. Полагая  $k_0(r - r_{res}) \sim 1$ , из условия  $F_1 = F_2$  получаем

$$\frac{-dp/dr}{B_z^2/8\pi} < \frac{B_z^2}{B_0^2} \frac{\tilde{\Theta}^2}{r}. \tag{14.80}$$

Это неравенство известно как критерий устойчивости Сайдема. Из него следует, что шир магнитного поля эффективно подавляет неустойчивости, локализованные вблизи резонансных магнитных поверхностей. Аналогичный критерий Мерсье может быть получен для тороидальной геометрии.

### 14.6. ТИРИНГ-МОДА

Как показано в предыдущем разделе, МГД-неустойчивости, локализованные вблизи резонансных магнитных поверхностей, стабилизируются широм. Однако вблизи резонансных магнитных поверхностей может развиваться неустойчивость, связанная с изменением топологии магнитного поля, так называемая тиринг-мода. Ее существование связано с конечной проводимостью плазмы вблизи резонансных магнитных поверхностей и при ее развитии вблизи этих поверхностей возникают магнитные острова — области с другой топологией магнитного поля.



**Рис. 14.7**  
Невозмущенное магнитное поле вблизи нейтрального слоя

Проанализируем развитие тиринг-моды на примере плоского слоя плазмы (см. рис. 14.7). Пусть основное невозмущенное магнитное поле  $B_y^0(x)$  направлено вдоль оси  $y$ , а величина его зависит от координаты  $x$ . При  $x = 0$  магнитное поле обращается в ноль, что соответствует нейтральному слою. Такое поле создается током

$$j_z^0 = (c/4\pi)\partial B_y^0(x)/\partial x.$$

Равновесное состояние описывается соотношением

$$-\frac{\partial p^0}{\partial x} + B_y^0 j_z^0 = 0. \quad (14.81)$$

Рассмотрим периодическое вдоль оси  $y$  возмущение магнитного поля  $B_x^1 \sim \exp(-i\omega t + ik_y y)$ . Зависимость от координаты  $z$  отсутствует. При этом из-за условия  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  возмущены оба компонента магнитного поля, которые связаны соотношением

$$\frac{\partial B_x^1}{\partial x} + ik_y B_y^1 = 0. \quad (14.82)$$

Вдали от резонансной магнитной поверхности силовые линии изгибаются, как показано на рис. 14.8. Переменное магнитное поле наводит вихревое электрическое поле вдоль  $z$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_x^1}{\partial t} = -\frac{\partial E_z^1}{\partial y}. \quad (14.83)$$

Так как тиринг-мода является аperiodической и вещественная часть частоты отсутствует, то электрическое

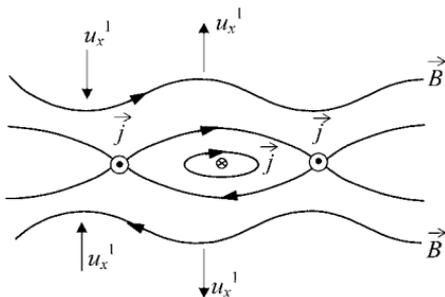


Рис. 14.8  
Формирование магнитного острова

поле сдвинуто по фазе на  $\pi/2$  относительно возмущения  $B_x^1$ . Электрическое поле вызывает дрейф плазмы вдоль оси  $x$  со скоростью

$$u_x^1 = -\frac{cE_z^1}{B_y^0}. \quad (14.84)$$

Скорость дрейфа плазмы направлена к нейтральному слою там, где силовые линии сжимаются, и от него там, где силовые линии расходятся.

Вблизи нейтрального слоя скорость (14.84) стремится к бесконечности, так как невозмущенное магнитное поле обращается в ноль. Здесь необходимо учесть конечную проводимость плазмы и вместо (14.84) использовать уравнение баланса сил для электронов вдоль оси  $z$ :

$$E_z^1 = -\frac{u_x^1 B_y^0}{c} + \eta j_z^1, \quad (14.85)$$

где  $\eta = \sigma_{\parallel}^{-1} = 0,51 m_e v_{ei} / ne^2$ . Продольные токи текут в тонком слое вблизи  $x = 0$ , где магнитное поле обращается в ноль, и создают магнитную конфигурацию с замкнутыми силовыми линиями — магнитные острова. Действительно, положительное возмущенное магнитное поле  $B_x^1$  вблизи  $x = 0$  уводит силовую линию в область положительных значений  $x$ . По мере смещения по  $x$  появляется невозмущенное магнитное поле вдоль оси  $y$  и силовая линия уходит вдоль  $y$ . При этом изменяется фаза возмущенного поля  $B_x^1$  и силовая линия начинает смещаться к плоскости  $x = 0$  и затем в область отрицательных значений  $x$ . Здесь невозмущенное магнитное поле меняет направление и уводит силовую линию в направлении  $-y$ . Фаза возмущения  $B_x^1$  опять меняется и в результате силовая линия совершает полный оборот, образуя магнитный остров (рис. 14.8). Вдали же от нейтрального слоя возмущенное поле  $B_x^1$  лишь деформирует силовую линию, не вызывая изменения ее топологии. Линия, разделяющая замкнутые и разомкнутые силовые линии магнитного поля, называется сепаратрисой.

Вблизи нейтрального слоя линеаризованное уравнение баланса сил имеет вид (возмущениями плотности и давления пренебрегаем)

$$\rho^0 \frac{\partial u_x^1}{\partial t} = -\frac{1}{c} j_z^1 B_y^0 - \frac{1}{c} j_z^0 B_y^1. \quad (14.86)$$

Движения плазмы считаем несжимаемыми ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ):

$$\frac{\partial u_x^1}{\partial x} + iku_y^1 = 0. \quad (14.87)$$

Линеаризованное уравнение для магнитного поля (10.14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial B_x^1}{\partial t} = iku_x^1 B_y^0 + \frac{c^2 \eta^0}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2} - k^2 B_x^1 \right). \quad (14.88)$$

Это уравнение содержит малый коэффициент  $\eta^0$  при старшей производной. Вдали от нейтрального слоя последний член в правой части несуществен, а при приближении к нему вторая производная становится большой, так что член  $\partial B_x^1 / \partial t$  компенсируется большой второй производной  $\partial^2 B_x^1 / \partial x^2$ , умноженной на малый коэффициент  $\eta^0$ . При крупномасштабном рассмотрении вторая производная от величины  $B_x^1$  терпит разрыв, в то время как в реальности первая производная резко меняется внутри пограничного слоя шириной  $2\varepsilon$ . Введем величину

$$\Delta' = \left[ \frac{dB_x^1}{dx} (+\varepsilon) - \frac{dB_x^1}{dx} (-\varepsilon) \right] / B_x^1(0). \quad (14.89)$$

Величина  $\Delta'$  определяется решением внешней задачи с соответствующими граничными условиями.

Внутри же пограничного слоя оценим вторую производную:

$$\frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta' B_x^1}{\varepsilon}. \quad (14.90)$$

Будем считать, что в пограничном слое все три члена в уравнении (14.88) одного порядка. Вводя инкремент неустойчивости  $\gamma$ , получим оценку

$$\gamma B_x^1 \sim \frac{c^2 \eta^0}{4\pi} \frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2}. \quad (14.91)$$

Из (14.90)–(14.91) имеем

$$\gamma \sim \frac{c^2 \eta^0 \Delta'}{4\pi \varepsilon}. \quad (14.92)$$

Еще одно соотношение между инкрементом и шириной пограничного слоя можно получить из уравнения баланса энергии. Согласно уравнению (2.8) скорость изменения энергии ионов (в нашем случае речь идет о кинетической энергии) определяется работой электрического поля. Будем считать, что длина волны возмущения много больше размера слоя:

$$k\varepsilon \ll 1. \quad (14.93)$$

Тогда из условия несжимаемости (14.87) следует, что  $|u_y^1| \gg |u_x^1|$ , а скорость изменения кинетической энергии с учетом (14.87) оказывается порядка

$$\gamma\rho^0 \frac{(u_y^1)^2}{2} \sim \gamma\rho^0 \frac{(u_x^1)^2}{2(k\varepsilon)^2}. \quad (14.94)$$

Приравниваем эту величину к работе электрического поля  $A = enE_z^1 u_z^1$ . Так как мы считаем, что все величины в (14.85) одного порядка, то  $E_z^1 \sim u_x^1 B_y^0 / c$ , а работа

$$A = j_z^1 u_x^1 B_y^0 / c. \quad (14.95)$$

Учитывая, что ток связан с возмущением магнитного поля согласно

$$j_z^1 \sim \frac{c}{4\pi k} \frac{\partial^2 B_x^1}{\partial x^2} \sim \frac{c B_x^1 \Delta'}{4\pi k \varepsilon}, \quad (14.96)$$

получаем, что

$$A = \frac{B_x^1 \Delta'}{4\pi k \varepsilon} u_x^1 B_y^0. \quad (14.97)$$

Тогда, приравнивая (14.97) и (14.94), получаем

$$\gamma\rho^0 \frac{(u_x^1)^2}{2(k\varepsilon)^2} \sim \frac{B_x^1 \Delta'}{4\pi k \varepsilon} u_x^1 B_y^0. \quad (14.98)$$

Оценим здесь невозмущенное магнитное поле как

$$B_y^0 \sim (B_y^0)' \varepsilon. \quad (14.99)$$

Подставляя в (14.98) оценку  $\gamma B_x^1 \sim k u_x^1 B_y^0 \sim k u_x^1 (B_y^0)' \varepsilon$ , которая следует из (14.88), и исключая скорость, найдем

$$\gamma^2 \sim \frac{[(B_y^0)']^2 k^2 \varepsilon^3 \Delta'}{2\pi\rho^0}. \quad (14.100)$$

Комбинируя (14.99) с (14.92), получаем выражение для инкремента неустойчивости:

$$\gamma \sim \frac{[(B_y^0)']^{2/5} k^{2/5} (\Delta')^{4/5} (\eta^0)^{3/5} c^{6/5}}{(4\pi)^{4/5} (\rho^0)^{1/5}}. \quad (14.101)$$

Обозначим характерный размер изменения параметров плазмы вдоль оси  $x$  как  $L$  и введем два характерных времени:

$$\tau_A = \frac{L}{c_A} = \frac{L(4\pi\rho^0)^{1/2}}{(B_y^0)^{1/2}}; \quad \tau_s = \frac{L^2 4\pi}{c^2 \eta^0}, \quad (14.102)$$

где  $\tau_A$  — альфвеновское время, а  $\tau_s$  — скиновое время.

Тогда

$$\gamma \sim \tau_A^{-2/5} \tau_s^{-3/5}. \quad (14.103)$$

Таким образом, характерное время развития тиринг-неустойчивости оказывается промежуточным между быстрым альфвеновским временем и медленным скиновым временем. Ширину пограничного слоя можно получить из (14.92):

$$\frac{\varepsilon}{L} \sim \left( \frac{\tau_A}{\tau_s} \right)^{2/5} \ll 1. \quad (14.104)$$

Тиринг-мода экспоненциально нарастает до тех пор, пока размер острова не станет порядка  $\varepsilon$ , после этого существенными становятся нелинейные эффекты. В цилиндре или торе тиринг-неустойчивость может развиваться вблизи резонансных магнитных поверхностей  $q = m/n$  (подробнее см. главу 15). В токамаке также существует так называемая неоклассическая тиринг-мода, связанная с перераспределением профиля бутстреп-тока из-за возникновения острова.

## 14.7. ГЕОДЕЗИКО-АКУСТИЧЕСКАЯ МОДА И ЗОНАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В токамаке возможны специфические колебания возмущений плотности, полоидальной и параллельной скоростей, а также радиального электрического поля, известные как геодезико-акустическая мода (ГАМ). Рассмотрим такие колебания на примере токамака с круглым

сечением в простой геометрии (13.1). Пусть наряду со стационарным электрическим полем, которое описывается выражением (13.62), в плазме имеется возмущенное радиальное электрическое поле, периодически изменяющееся во времени. Соответствующий возмущенный потенциал

$$\phi_0^G(r) = A^G(r) \exp(-i\omega t) \tag{14.105}$$

не зависит от полоидального угла и имеет произвольный масштаб по радиусу. Возмущенное радиальное поле

$$E_0^G = -d\phi_0^G / dr$$

вызывает полоидальное вращение плазмы (дополнительное к основному) со скоростью  $V_0^G = -cE_0^G / B$ . Соответствующие полоидальные потоки называют зональными потоками по аналогии с зональными течениями в атмосферах планет.

В неоднородном магнитном поле дивергенция  $V_0^G$  отлична от нуля, что должно приводить к появлению потоков плазмы вдоль силовых линий магнитного поля, аналогичных пфирш-шлютеровским потокам (рис. 14.9). Эти потоки в отличие от пфирш-шлютеровских периодически меняют свое направление, а амплитуда их пропорциональна  $\cos\theta$ . Продольная скорость соответственно

$$u_{i\parallel}^G(\theta) = u_{i\parallel}^a \cos\theta, \tag{14.106}$$

где величина также периодически меняется во времени. В свою очередь, параллельные потоки должны вызываться продольным градиентом давления, поэтому на магнитной поверхности существует периодическое возмущение концентрации, пропорциональное  $\sin\theta$ :

$$n_1^G = n_1^a \sin\theta. \tag{14.107}$$

Таким образом, возмущенное радиальное электри-

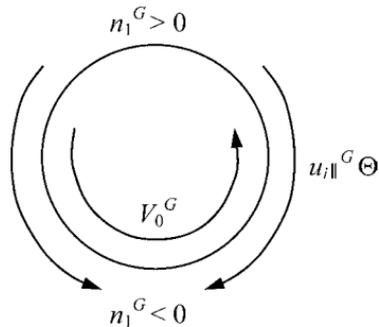


Рис. 14.9

Полоидальные скорости и возмущения концентрации в геодезико-акустической моде

ческое поле имеет полоидальное волновое число  $m = 0$ , а возмущения концентрации и параллельной скорости соответствуют  $m = 1$ .

Уравнение непрерывности имеет вид

$$-i\omega n_1^G - \frac{n_0 \Theta u_{\parallel}^a}{r} \sin\theta - \frac{2\varepsilon}{r} n_0 V_0^G \sin\theta = 0, \quad (14.108)$$

где второй член представляет собой дивергенцию полоидальной проекции параллельного потока, а третий член — дивергенцию потока, связанного с полоидальным вращением. Уравнение продольного баланса сил:

$$-i\omega m_i n_0 u_{\parallel}^a \cos\theta = -\Theta \frac{T_e + T_i}{r} n_1^a \cos\theta. \quad (14.109)$$

Предполагаем, что температуры плазмы не возмущены из-за большой продольной теплопроводности электронов и сильного теплообмена.

Для определения возмущенного радиального электрического поля необходимо уравнение баланса тока. В частности, достаточно воспользоваться равенством нулю тока, проинтегрированного по магнитной поверхности. Вследствие возмущения концентрации на магнитной поверхности возникает отличный от нуля усредненный ток, связанный с  $\nabla B$  дрейфом частиц:

$$\begin{aligned} \langle\langle I_{\nabla B} \rangle\rangle &= -2\pi r R \int_0^{2\pi} \frac{2c(T_e + T_i)}{BR} n_1^G \sin\theta d\theta = \\ &= -\frac{4\pi^2 r c (T_e + T_i) n_1^a}{B}. \end{aligned} \quad (14.110)$$

Его компенсирует поляризационный ток, связанный с изменением электрического поля во времени:

$$\langle\langle I_P \rangle\rangle = -4\pi^2 r R \frac{c m_i n_0}{B} \frac{\partial V_0^G}{\partial t}. \quad (14.111)$$

Из условия  $\langle\langle I_{\nabla B} \rangle\rangle + \langle\langle I_P \rangle\rangle = 0$  имеем

$$\frac{c_s^2 \varepsilon}{r} \frac{n_1^G}{n_0} - i\omega V_0^G = 0, \quad (14.112)$$

где  $c_s = \sqrt{(T_e + T_i)/m_i}$ .

Из (14.108)–(14.109) имеем для амплитуд:

$$\begin{aligned} i\omega \frac{n_1^a}{n_0} + \frac{\Theta u_{\parallel}^a}{r} + \frac{2\varepsilon}{r} V_0^G &= 0, \\ -i\omega u_{i\parallel}^a + \frac{\Theta c_s^2}{r} \frac{n_1^a}{n_0} &= 0. \end{aligned} \quad (14.113)$$

Приравнивая к нулю определитель системы (14.112)–(14.113), получаем дисперсионное уравнение для частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{c_s^2}{R^2} \left( 2 + \frac{1}{q^2} \right). \quad (14.114)$$

В рассмотренном приближении ГАМ имеет вещественную частоту порядка баунс-частоты ионов. По современным представлениям ГАМ может раскачиваться и затухать за счет нелинейного взаимодействия с дрейфовыми волнами, находясь с ними в динамическом равновесии.

# Глава 15. МАГНИТНЫЕ ОСТРОВА И СТОХАСТИЗАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 15.1. МАГНИТНЫЕ ОСТРОВА

Как мы видели в предыдущей главе, в результате развития тиринг-неустойчивости в плазме возникают магнитные острова. Такая же конфигурация магнитного поля может быть создана и за счет возмущений магнитного поля, вызванных токами во внешних проводниках. Рассмотрим структуру магнитных островов, возникающих за счет того или другого механизма, более подробно. Пусть невозмущенное магнитное поле  $B_y^0(x)$  имеет тот же вид, что и в предыдущем разделе (см. рис. 14.7), т. е. меняет знак при  $x = 0$ . Вблизи  $x = 0$  поле меняется по линейному закону:

$$B_y^0(x) = (B_y^0)'x. \quad (15.1)$$

В общем случае кроме поля  $B_y^0(x)$  существует и магнитное поле  $B_z^0$ , причем для простоты будем полагать  $B_y^0(x) \ll B_z^0$ . Будем считать возмущенное магнитное поле стационарным (созданным внешними проводниками) и заданным в виде суммы гармоник:

$$B_x^1 = \sum_{k_y, k_z} B_{\vec{k}} \exp(ik_y y + ik_z z). \quad (15.2)$$

Если поле  $B_z^0 = 0$ , то вследствие условия  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  можно ввести потоковую функцию для полного магнитного поля:

$$B_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (15.3)$$

Для одной гармоники с вещественной амплитудой  $B_x^1 = B_{\bar{k}} \sin k_y y$

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{2}(B_y^0)'x^2 + \frac{B_{\bar{k}}}{k_y} \cos k_y y. \quad (15.4)$$

При этом следует иметь в виду, что возмущены оба компонента магнитного поля  $B_x^1$  и  $B_y^1$ , так как величина  $B_x^1$  зависит от  $x$ . Линия  $\Psi = \text{const}$  совпадает с силовой линией магнитного поля (рис. 14.9). Действительно, вдоль этой линии  $d\Psi = dx\partial\Psi/\partial x + dy\partial\Psi/\partial y = 0$ , откуда с учетом (15.3) следует соотношение  $-B_y dx + B_x dy = 0$ , которое совпадает с уравнением силовой линии. Согласно (15.4) в  $X$ -точке на сепаратрисе с координатами  $x = 0, y = 0$

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{B_{\bar{k}}}{k_y}. \quad (15.5)$$

В  $O$ -точке на сепаратрисе с координатами  $x = W/2, y = \pi/k_y$

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{2}(B_y^0)' \left(\frac{W}{2}\right)^2 - \frac{B_{\bar{k}}}{k_y}, \quad (15.6)$$

где  $W$  — максимальная ширина сепаратрисы. Из (15.5)–(15.6) получаем выражение для ширины острова:

$$W = 4 \left( \frac{B_{\bar{k}}}{k_y (B_y^0)'} \right)^{1/2}. \quad (15.7)$$

Если поле  $B_z^0$  отлично от нуля, то силовая линия магнитного поля в основном движется вдоль оси  $z$ , а проекция конца силовой линии в плоскости  $xu$  для одной гармоники с  $k_z = 0$  ведет себя так же, как при  $B_z^0 = 0$ , образуя вблизи плоскости  $x = 0$  магнитные острова. Если же гармоника  $B_x^1 = B_{\bar{k}} \exp(ik_z z + ik_y y)$  имеет конечные волновые вектора  $k_y$  и  $k_z$ , то выделенной является плоскость  $x = x_0$ , где фаза возмущения остается постоянной вдоль невозмущенной силовой линии. Поверхность  $x = x_0$  будем называть резонансной. Фаза  $k_z z + k_y y = 0$  постоянна вдоль прямой  $z = -(k_y/k_z)y$ . Уравнение же невозмущенной силовой линии имеет вид  $z = yB_z^0 / (B_y^0)' x_0$ . Сопоставляя два выражения, получаем

$$x_0 = -\frac{k_z B_z^0}{k_y (B_y^0)'}. \quad (15.8)$$

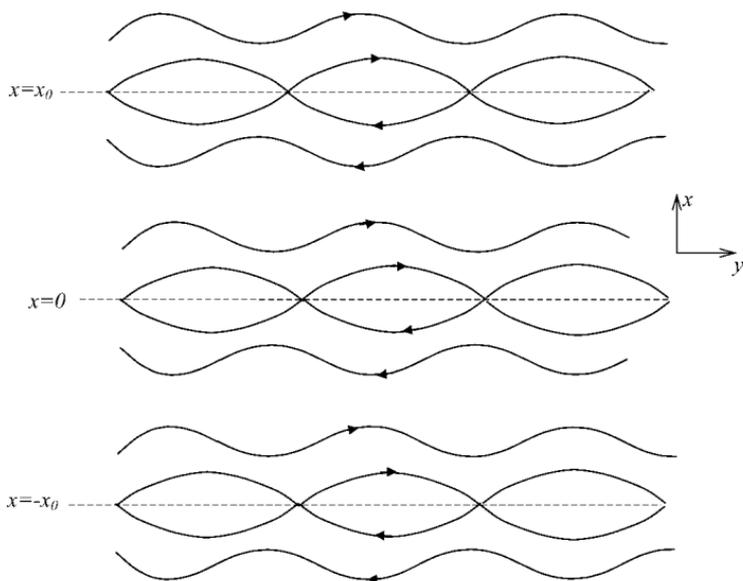


Рис. 15.1

Магнитные острова вблизи резонансных магнитных поверхностей

Волновые вектора могут совпадать или отличаться по знаку, так что  $x_0$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Рассуждая так же, как для  $B_z^0 = 0$ , можно показать, что вблизи резонансных поверхностей силовая линия магнитного поля навивается на невозмущенную силовую линию. Для наблюдателя, перемещающегося вдоль невозмущенного магнитного поля, конец силовой линии образует остров. Происходит это за счет изменения  $y$ -компонента магнитного поля при смещении силовой линии по  $x$  и изменения фазы возмущения  $B_x^1$ . Если спроектировать кривую, описываемую силовой линией вокруг невозмущенной силовой линии, на плоскость  $xu$  вдоль невозмущенного магнитного поля, то получим картину, приведенную на рис. 15.1. Ширина острова по-прежнему дается выражением (15.7). Если имеется много различных гармоник возмущенного магнитного поля, то в плазме возникает система островов, причем каждый остров возникает около своей резонансной магнитной поверхности в соответствии с (15.8).

В осесимметричной магнитной конфигурации, например в токамаке, магнитные острова возникают аналогичным образом вблизи резонансных магнитных поверхностей. Пусть для круглых магнитных поверхностей имеется возмущенное радиальное магнитное поле:

$$B_r^1 = \sum_{m,n} B_{mn} \exp(im\theta - in\zeta). \quad (15.9)$$

Резонансными являются поверхности (14.77)

$$q(r_{res}) = \frac{m}{n}. \quad (15.10)$$

Роль меняющегося вдоль оси  $x$  поля  $B_y^0$  играет полоидальное магнитное поле  $B_\theta^0$ , изменяющееся по радиусу. Введем добавку к невозмущенному полоидальному магнитному полю:

$$B_\theta^{*0} = B_\theta^0(r) - B_\theta^0(r_{res}), \quad (15.11)$$

которая связана с соответствующим потоком:

$$B_\theta^{*0} = \nabla\Psi^* \cdot \nabla\zeta. \quad (15.12)$$

Здесь, в отличие от (12.91), величина  $2\pi$  включена в потоковую функцию. Резонансная гармоника образует вокруг невозмущенной силовой линии остров из-за зависимости полоидального поля (15.11) от радиуса, аналогично плоскому случаю. При этом силовая линия в пространстве обвивается вокруг невозмущенной силовой линии. Введем по аналогии с (15.3) для одной гармоники (15.9) потоковую функцию, которая соответствует полному (включая возмущенное) магнитному полю:

$$\Psi = \Psi^*(r) + \Psi_r \cos(m\theta - n\zeta). \quad (15.13)$$

Величине  $ky + k_z z$  в плоском случае соответствует фаза  $m\theta - n\zeta$ . Поле  $B_r^1$  получается как

$$B_r^1 = -\frac{\partial\Psi}{r\partial(\theta - \zeta/q)}. \quad (15.14)$$

Как и в плоском случае, разложим поток в ряд вблизи резонансной магнитной поверхности:

$$\Psi = \Psi^*(r_{res}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Psi^*}{dr^2}(r_{res})(r - r_{res})^2 + \Psi_r \cos(m\theta - n\zeta). \quad (15.15)$$

Действуя, как и в плоском случае, получаем

$$W = 4r \left( \frac{B_{mn}}{mB_0} \left| \frac{q}{rq'} \right| \right)^{1/2}. \quad (15.16)$$

В общем случае радиальные возмущения магнитного поля приводят к возникновению системы магнитных островов вблизи резонансных магнитных поверхностей, положение которых дается выражением (15.8) в плоском случае и (15.10) в цилиндрическом случае.

## 15.2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ДИФFUЗИЯ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В ситуации, когда имеется несколько гармоник возмущенного магнитного поля достаточной амплитуды, магнитное поле может стать стохастическим. Для этого необходимо, чтобы расстояние между соседними магнитными островами  $\Delta x_0 = |x_0(k_y, k_z) - x'_0(k'_y, k'_z)|$  (или  $\Delta r_{res} = |r_{res}(m, n) - r'_{res}(m', n')|$  в цилиндрическом случае) было меньше ширины острова. Это условие стохастичности известно как критерий Чирикова:

$$\Delta x_0 < \frac{W(k_y, k_z) + W'(k'_y, k'_z)}{2}. \quad (15.17)$$

Как показано ниже, уравнение, описывающее смещение силовой линии магнитного поля в радиальном направлении, эквивалентно уравнению Ньютона, поэтому можно использовать формализм, развитый в механике. Обсудим качественно соответствующие результаты.

Рассмотрим пучок силовых линий, образующих магнитную трубку. Будем двигаться вдоль силовой линии, обозначив пройденное расстояние  $l$  и отмечая текущее положение конца силовой линии в плоскости, перпендикулярной силовой линии. Пусть при  $l = 0$  множество концов силовых линий представляют собой кружок (рис. 15.2a). Если критерий Чирикова не выполнен, то сечение силовой трубки при увеличении  $l$  остается примерно таким же, несколько деформируясь из-за присутствия возмущенного поперечного магнитного поля. При выполнении же критерия Чирикова

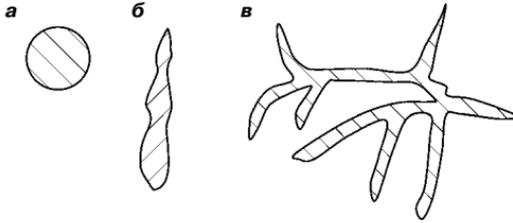


Рис. 15.2

Деформация сечения силовой трубки с расстоянием вдоль магнитной силовой линии:

*a* — исходное сечение при  $l = 0$ ; *б* — начало развития стохастической неустойчивости  $l > L_c$ ; *в* — стохастические блуждания силовых линий при  $l \gg L_c$ .

характер движения концов силовой линии в поперечной плоскости меняется. Согласно общей теории движение становится неустойчивым (это утверждение известно как теорема Колмогорова — Арнольда — Мозера). Существует так называемая колмогоровская длина  $L_c$ , такая, что при  $l > L_c$  силовые линии начинают экспоненциально расходиться. Это явление и представляет собой стохастическую неустойчивость. Затем начинается стохастическая диффузия — случайные блуждания концов силовых линий в поперечной плоскости. При этом сечение силовой трубки сильно деформируется, растягиваясь в одном направлении и сжимаясь в другом направлении, так как площадь сечения трубки должна сохраняться, что следует из сохранения магнитного потока (рис. 15.2б). При дальнейшем увеличении пути  $l$  вдоль силовой линии сечение силовой трубки приобретает сложный вид, показанный на рис. 15.2в. Длина «рукавов» возрастает, а их толщина уменьшается, обеспечивая сохранение общей площади.

Средний квадрат смещения в поперечном направлении, в частности в интересующем нас направлении  $x$ , при  $l > L_c$  пропорционален длине  $l$  в соответствии со случайным характером блужданий:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = 2D_{st}l, \quad (15.18)$$

где величина  $D_{st}$  называется коэффициентом стохастической диффузии силовых линий магнитного поля.

Чтобы связать величину коэффициента стохастической диффузии с возмущенным магнитным полем, рассмотрим

вначале уравнение силовой линии в присутствии возмущений. Уравнения силовой линии имеют вид

$$\frac{dx}{dl} = \frac{B_x}{B}; \quad \frac{dy}{dl} = \frac{B_y}{B} = \frac{x}{a}, \quad (15.19)$$

где  $a = B_z^0 / (B_y^0)'$ . Интегрируя второе уравнение, для силовой линии, которая при  $l = 0$  соответствует  $x = x_0$  и  $y = 0$ , имеем

$$y = \frac{x_0 l}{a} + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x x' dl. \quad (15.20)$$

Для одной гармоники возмущения, удовлетворяющей условию (15.8), после подстановки (15.20) в фазу возмущения из первого уравнения (15.19) получаем

$$\frac{dx}{dl} = \frac{B_{\tilde{k}}}{B_z^0} \exp(i \frac{k_y}{a} \int_{x_0}^x x' dl). \quad (15.21)$$

Покажем, что уравнение (15.21) эквивалентно уравнению Ньютона в задаче о движении заряженной частицы в поле продольной волны. Для периодической волны уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t - kx). \quad (15.22)$$

Перейдем в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью волны:

$$x = \frac{\omega}{k} t + \tilde{x}. \quad (15.23)$$

В движущейся системе отсчета

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \cos k\tilde{x} = \frac{e}{m} E_0 \cos(k \int \tilde{V} dt). \quad (15.24)$$

Уравнение (15.24) эквивалентно уравнению (15.21), причем переменные в (15.21) следующим образом соответствуют переменным в задаче о движении частицы в поле волны:

$$l \leftrightarrow t; \quad x \leftrightarrow \tilde{V}; \quad \frac{B_{\tilde{k}}}{B_z^0} \leftrightarrow \frac{e}{m} E_0; \quad \frac{k_y}{a} \leftrightarrow k. \quad (15.25)$$

Как известно, характер движения частицы зависит от ее энергии. Если кинетическая энергия частицы в движу-

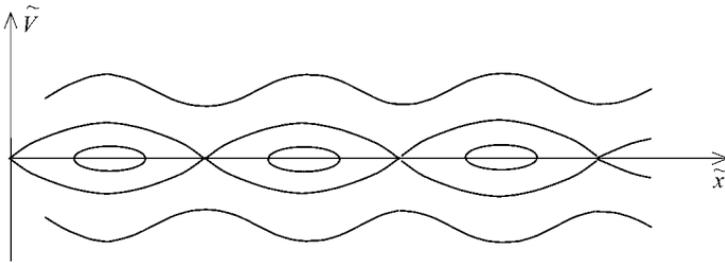


Рис. 15.3  
Фазовая плоскость  $(\tilde{V}, \tilde{x})$

щейся вместе с волной системе отсчета мала, то частица является захваченной и колеблется между горбами потенциала. Частица с большой кинетической энергией остается пролетной, причем скорость ее промодулирована за счет потенциала волны. Различный характер движения иллюстрируется фазовой плоскостью (рис. 15.3). Граничная скорость, которая соответствует сепаратрисе, находится из условия  $m\tilde{V}_c^2/2 = 2e\phi_{\max}$ , откуда

$$\tilde{V}_c = 2 \left( \frac{e\phi_{\max}}{m} \right)^{1/2} = 2 \left( \frac{eE_0}{mk} \right)^{1/2}, \quad (15.26)$$

а ширина сепаратрисы:

$$\Delta V = 2\tilde{V}_c = 4 \left( \frac{eE_0}{mk} \right)^{1/2}. \quad (15.27)$$

Формула (15.27) соответствует выражению для ширины острова (15.7) с учетом соответствия (15.25).

Если на заряженную частицу действует несколько волн, то на фазовой плоскости возникает несколько зон финитного движения, соответствующих захвату полем разных волн, шириной (15.27). При перекрытии этих зон движение частицы становится случайным. В этом случае в соответствии с эргодической теорией описание одной частицы эквивалентно описанию ансамбля частиц с помощью функции распределения. Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE^1}{m} \frac{\partial f}{\partial V} = 0, \quad (15.28)$$

где малое электрическое поле представляет собой сумму гармоник:

$$E^1 = \sum_k E_k \exp(-i\omega_k t + ikx). \quad (15.29)$$

В квазилинейном приближении ищем решение в виде

$$f = f^0 + f^1; \quad f^1 = \sum_k f_k \exp(-i\omega_k t + ikx). \quad (15.30)$$

При квазилинейном подходе пренебрегают взаимодействием гармоник и учитывают лишь воздействие всех волн на функцию  $f^0$ .

В линейном приближении кинетическое уравнение сводится к уравнению для гармоник:

$$(-i\omega_k + ikV)f_k = -\frac{eE_k}{m} \frac{\partial f^0}{\partial V}, \quad (15.31)$$

откуда следует

$$f_k = -i \frac{eE_k}{m} \frac{\partial f^0}{\partial V} \frac{1}{\omega_k - kV}. \quad (15.32)$$

Здесь, в соответствии с (8.39),

$$\frac{1}{\omega_k - kV} = P\left(\frac{1}{\omega_k - kV}\right) - i\pi\delta(\omega_k - kV). \quad (15.33)$$

Уравнение для  $f^0$  получается при учете в кинетическом уравнении (15.28) квадратичных членов и последующем усреднении по пространству:

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = -\left\langle \frac{eE^1}{m} \frac{\partial f^1}{\partial V} \right\rangle. \quad (15.34)$$

При усреднении в двойном суммировании остаются только члены с  $k = -k'$  и мнимая часть (15.33) (см. также раздел 8.5):

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial V} \left[ \sum_k \frac{\pi e^2 |E_k|^2}{m^2} \delta(\omega_k - kV) \frac{\partial f^0}{\partial V} \right]. \quad (15.35)$$

Это уравнение представляет собой уравнение диффузии в пространстве скоростей с квазилинейным коэффициентом диффузии:

$$D = \sum_k \frac{\pi e^2 |E_k|^2}{m^2} \delta(\omega_k - kV). \quad (15.36)$$

Диффузия в пространстве скоростей стремится установить плато на функции распределения в области, где есть резонансы.

Используя аналогию между стохастическим движением заряженной частицы в поле многих волн и движением конца силовой линии магнитного поля при перекрытии магнитных островов, введем для описания последнего функцию распределения  $f_B$  в плоскости, перпендикулярной силовой линии. По аналогии с (15.36) с учетом соответствия (15.25) уравнение для плотности силовых линий должно иметь вид уравнения диффузии:

$$\frac{\partial f_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k_y, k_z} \pi \frac{|B_k^-|^2}{(B_z^0)^2} \delta(k_z + k_y \frac{x}{a}) \frac{\partial f_B}{\partial x} \right], \quad (15.37)$$

где коэффициент стохастической диффузии силовых линий дается выражением

$$D_{st} = \sum_{k_y, k_z} \pi \frac{|B_k^-|^2}{(B_z^0)^2} \delta(k_z + k_y \frac{x}{a}). \quad (15.38)$$

Аналогично в тороидальной геометрии с учетом соотношения  $\delta(n/R - mB_0/rB_c) = R\delta(n - m/q)$  имеем

$$D_{st} = \sum_{m,n} \pi R \frac{|B_{mn}|^2}{B^2} \delta(n - m/q). \quad (15.39)$$

Коэффициент стохастической диффузии имеет размерность длины и определяет средний квадрат смещения силовой линии в поперечном направлении в зависимости от пройденной длины в соответствии с (15.18).

### 15.3. ПЕРЕНОС В СТОХАСТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Диффузия силовой линии приводит к появлению стохастических коэффициентов переноса. Оценить коэффициент диффузии пробной частицы, например электрона, можно следующим образом. Пусть длина свободного

электрона  $\lambda_{mfp}$  больше, чем колмогоровская длина  $L_c$ . В этом случае электрон свободно летит вдоль силовой линии, одновременно смещаясь поперек магнитного поля вместе с ней. Поперечное смещение становится необратимым только после столкновения, в результате которого ведущий центр ларморовской окружности электрона смещается на величину порядка электронного ларморовского радиуса  $\rho_{ce}$ . Первоначально электрон был «размазан» по силовой трубке радиуса  $\rho_{ce}$ . При  $l > L_c$  поперечное сечение силовой трубки приобретает вид, показанный на рис. 15.2, причем поперечный размер «рукавов» становится меньше  $\rho_{ce}$ . Поэтому при столкновении электрон переходит в совсем другую трубку и «забывает» о своей истории, в результате чего движение становится необратимым. Так как за время  $t$  электрон пролетает длину  $l = V_{\parallel}t$ , то в соответствии с (15.18)

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = 2D_{st}V_{\parallel}t, \quad (15.40)$$

и коэффициент диффузии пробной частицы:

$$D_{test} = D_{st}V_{\parallel}. \quad (15.41)$$

Заменяя параллельную скорость электронов на среднюю тепловую скорость, получим оценку для электронной температуропроводности в стохастическом магнитном поле:

$$\chi_e = D_{st}V_{Te}. \quad (15.42)$$

Это выражение известно как формула Речестера — Розенблюта.

Коэффициент диффузии в стохастическом магнитном поле значительно меньше — он определяется движением ионов вдоль силовой линии, скорость которых в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  меньше, чем скорость электронов. В плазме возникает амбиполярное электрическое поле, которое тормозит электроны, а результирующий амбиполярный коэффициент диффузии можно оценить как

$$D = D_{st}c_s, \quad (15.43)$$

где  $c_s = \sqrt{(T_e + T_i)/m_i}$  — скорость ионного звука.

В случае, когда стохастическое магнитное поле создается за счет развитой турбулентности, оценить коэффи-

циенты переноса можно следующим образом. В уравнении для магнитного поля (10.14)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\nabla \cdot [\vec{u} \cdot \vec{B}]] - \frac{c^2}{4\pi} [\nabla \cdot (\hat{\sigma}^{-1} \nabla \cdot \vec{B})] \quad (15.44)$$

оценим бесстолкновительную проводимость как

$$\sigma \sim \frac{ne^2}{m_e \omega}, \quad (15.45)$$

где  $\omega$  — характерная частота турбулентности. Характерный масштаб оценим как масштаб, на котором нарушается вмероженность, т. е. все три члена в уравнении (15.44) становятся одного порядка. Сравнивая первый и третий члены

$$B\omega = \frac{c^2 m_e \omega B}{4\pi n e^2 \delta^2}, \quad (15.46)$$

получаем характерный масштаб:

$$\delta = \frac{c}{\omega_{pe}}, \quad (15.47)$$

где  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n e^2 / m_e}$  — электронная плазменная частота. Масштаб  $\delta$  называется бесстолкновительным скин-слоем. Для токамака положим, что силовая линия отклоняется на величину  $\delta$  на колмогоровской длине, которая в токамаке порядка  $qR$ , откуда

$$B_{\vec{k}} / B \sim \frac{c}{\omega_{pe} q R}. \quad (15.48)$$

Подставляя эту оценку в (15.42), (15.39), получаем оценку электронной теплопроводности в стохастическом магнитном поле:

$$\chi_e \sim \frac{c^2 V_{Te}}{\omega_{pe}^2 q^2 R}. \quad (15.49)$$

Это выражение, известное как формула Окавы, представляет собой оценку электронной температуропроводности в стохастическом магнитном поле при развитой магнитной турбулентности. При этом коэффициент температуропроводности обратно пропорционален концентрации и не зависит от величины магнитного поля. В реальности, однако, такой уровень магнитной турбулентности, по-видимому, не достигается.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Механика. М. : Наука, 1973.
2. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теория поля. М. : Наука, 1973.
3. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Статистическая физика. ч. 1. — М. : Наука, 1976.
4. Голант, В. Е., Жилинский, А. П., Сахаров И. Е. Основы физики плазмы. — СПб. : Лань, 2011.
5. Чен, Ф. Введение в физику плазмы. — М. : Мир, 1987.
6. Силин, В. П. Введение в кинетическую теорию газов. — М. : Наука, 1971.
7. Рожанский, В. А., Цендин, Л. Д. Столкновительный перенос в частичноионизованной плазме. — М. : Энергоатомиздат, 1988.
8. Сивухин, Д. В. Вопросы теории плазмы / сб. под ред. Леонтовича М. А. вып. 1. — М. : Госатомиздат, 1963.
9. Брагинский, С. И. Вопросы теории плазмы / сб. под ред. Леонтовича М. А. вып. 1. — М. : Госатомиздат, 1963.
10. Жданов, В. М. Явления переноса в многокомпонентной плазме. — М. : Энергоиздат, 1982.
11. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М. : Наука, 1982.
12. Трубников, Б. А. Теория плазмы. — М. : Энергоатомиздат, 1996.
13. Hirshman, S. P., Sigmar D. J. Nuclear Fusion 21 (1981) 1079.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Кинетическое уравнение</b> . . . . .	4
1.1. Кинетическое уравнение Больцмана . . . . .	4
1.2. Интеграл столкновений при кулоновском взаимодействии . . . . .	9
1.2.1. Общий вид дополнительного потока в пространстве скоростей . . . . .	9
1.2.2. Торможение и расплывание облака пробных частиц . . . . .	11
1.2.3. Потери импульса и энергии пробными частицами . . . . .	15
1.2.4. Столкновительный член в форме Ландау . . . . .	16
1.3. Уравнение Фоккера — Планка . . . . .	17
1.4. Убегающие электроны в полностью ионизованной плазме . . . . .	20
1.5. Функция распределения электронов в слабоионизованной плазме . . . . .	25
1.5.1. Приближение $f_0, f_1$ . . . . .	26
1.5.2. Функция распределения в электрическом поле . . . . .	30
1.5.3. Влияние электрон-электронных столкновений . . . . .	32
1.5.4. Общее выражение для $f_1$ . . . . .	33
1.6. Коэффициенты переноса электронов в слабоионизованной плазме . . . . .	33
1.7. Кинетическое уравнение в дрейфовом приближении . . . . .	36
<b>Глава 2. Уравнения переноса</b> . . . . .	38
2.1. Уравнения моментов . . . . .	38
2.2. Коэффициенты переноса в полностью ионизованной плазме. Метод Чепмена — Энскога . . . . .	42
2.3. Сводка результатов для полностью ионизованной плазмы . . . . .	48
2.4. Коэффициенты переноса в полностью ионизованной плазме. Качественное рассмотрение . . . . .	51
2.4.1. Сила трения, обусловленная относительной скоростью. Термосила . . . . .	51
2.4.2. Проводимость . . . . .	52
2.4.3. Поток тепла. Теплопроводность, конвективная часть . . . . .	53
2.4.4. Тепловыделения при столкновениях . . . . .	56
2.4.5. Вязкость . . . . .	56
2.5. Уравнение для энтропии . . . . .	57

<b>Глава 3. Квазинейтральность и слой пространственного заряда . . .</b>	<b>60</b>
3.1. Установление квазинейтральности . . . . .	60
3.2. Бесстолкновительный слой пространственного заряда . . . . .	63
3.2.1. Электроны в конденсаторе с тормозящим полем . . . . .	64
3.2.2. Потоки частиц и энергии на материальные поверхности . . . . .	67
3.2.3. Вольт-амперная характеристика слоя. Плавающий потенциал . . . . .	68
3.2.4. Структура слоя. Критерий Бома . . . . .	69
3.3. Влияние электронной эмиссии. Двойной слой . . . . .	72
3.4. Слой в магнитном поле . . . . .	74
<b>Глава 4. Диффузия частично ионизованной плазмы без магнитного поля . . . . .</b>	<b>77</b>
4.1. Уравнение амбиполярной диффузии . . . . .	77
4.2. Примеры решения диффузионных задач . . . . .	80
4.2.1. Распад начального возмущения в безграничной плазме . . . . .	80
4.2.2. Положительный столб газового разряда . . . . .	81
4.2.3. Диффузионный распад плазмы . . . . .	83
4.2.4. Диффузионный зонд . . . . .	83
<b>Глава 5. Диффузия частично ионизованной плазмы в магнитном поле . . . . .</b>	<b>85</b>
5.1. Диффузия и подвижность в магнитном поле . . . . .	85
5.2. Одномерная диффузия в магнитном поле . . . . .	89
5.2.1. Диффузия поперек магнитного поля . . . . .	89
5.2.2. Одномерная диффузия под произвольным углом к магнитному полю . . . . .	90
5.3. Диффузия возмущения в безграничной плазме . . . . .	94
5.4. Диффузия в плазме, ограниченной стенками . . . . .	100
5.5. Диффузионный зонд в магнитном поле . . . . .	104
<b>Глава 6. Частично ионизованная плазма с током . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1. Плазма с током без магнитного поля . . . . .	107
6.1.1. Малые возмущения . . . . .	109
6.1.2. Нелинейная эволюция . . . . .	111
6.2. Плазма с током в магнитном поле . . . . .	113
6.2.1. Одномерная эволюция . . . . .	113
6.2.2. Эволюция малого возмущения в безграничной плазме . . . . .	114
6.2.3. Эффект восстановления проводимости . . . . .	116
<b>Глава 7. Перенос сильноионизованной плазмы поперек магнитного поля . . . . .</b>	<b>118</b>
7.1. Классическая диффузия полностью ионизованной плазмы поперек магнитного поля . . . . .	118
7.2. Перенос примесей в полностью ионизованной плазме поперек магнитного поля . . . . .	124
7.3. Частично ионизованная плазма с неоднородной концентрацией нейтралов . . . . .	126
<b>Глава 8. Дрейфовые волны и турбулентный перенос . . . . .</b>	<b>129</b>
8.1. Дрейфовые волны в неоднородной плазме . . . . .	129
8.2. Дрейфово-диссипативная неустойчивость . . . . .	133
8.3. Универсальная неустойчивость . . . . .	136
8.4. Неустойчивости, вызванные градиентом температуры . . . . .	140
8.5. Турбулентная диффузия под действием случайных электрических полей . . . . .	142

8.6. Влияние шира магнитного поля на развитие неустойчивостей . . . . .	146
<b>Глава 9. Динамика полностью ионизованной плазмы без магнитного поля . . . . .</b>	<b>152</b>
9.1. Ионный звук . . . . .	152
9.2. Нелинейная динамика. Автомодельные решения . . . . .	158
9.3. Простые нелинейные волны. Опрокидывание . . . . .	161
9.4. Нелинейные ионно-звуковые волны с дисперсией . . . . .	163
<b>Глава 10. Магнитная гидродинамика . . . . .</b>	<b>168</b>
10.1. Уравнения магнитной гидродинамики . . . . .	168
10.2. Вмороженность и скин-эффект . . . . .	172
10.3. Магнитогидродинамические волны . . . . .	176
10.4. Нелинейные магнитогидродинамические волны . . . . .	185
10.5. Магнитозвуковые волны с дисперсией . . . . .	188
<b>Глава 11. Динамика плазменных пучков и сгустков в магнитном поле . . . . .</b>	<b>192</b>
11.1. Движение плазмы поперек магнитного поля в вакууме . . . . .	192
11.2. Торможение плазменной струи в фоновой плазме . . . . .	197
<b>Глава 12. Равновесие плазмы в магнитном поле . . . . .</b>	<b>202</b>
12.1. О невозможности равновесия без внешнего магнитного поля . . . . .	203
12.2. Равновесие пинча . . . . .	204
12.3. Поверхностные величины . . . . .	206
12.4. Уравнение Грэда — Шафранова . . . . .	211
12.5. Интегральное условие равновесия плазмы в токамаке . . . . .	215
12.6. Равновесие плазмы в токамаке с магнитными поверхностями, близкими к круговым . . . . .	220
12.7. Системы координат для магнитных поверхностей произвольной формы . . . . .	224
12.8. Бессиловое равновесие и канонические профили в пинчах . . . . .	228
<b>Глава 13. Процессы переноса в токамаках . . . . .</b>	<b>233</b>
13.1. Гидродинамический режим (режим Пфирша — Шлютера) . . . . .	235
13.1.1. Качественные оценки . . . . .	235
13.1.2. Теплопроводность . . . . .	238
13.1.3. Течения плазмы на магнитной поверхности, возмущения концентрации и потенциала . . . . .	241
13.1.4. Потoki частиц . . . . .	245
13.2. Радиальное электрическое поле, полоидальное и тороидальное вращение . . . . .	246
13.3. Неоклассический перенос в бесстолкновительных режимах . . . . .	252
13.4. Функция распределения частиц в бесстолкновительных режимах . . . . .	261
13.5. Уравнения баланса частиц и тепла . . . . .	269
<b>Глава 14. Устойчивость плазмы в магнитном поле . . . . .</b>	<b>274</b>
14.1. Неустойчивость Рэля — Тейлора в жидкости . . . . .	274
14.2. Желобковая неустойчивость плазмы . . . . .	278
14.3. Диссипативные модификации желобковой неустойчивости . . . . .	283
14.3.1. Неустойчивость Рэля — Тейлора в частично ионизованной плазме . . . . .	283

14.3.2. Желобковая неустойчивость плазмы, контактирующей с металлическими стенками . . . . .	284
14.3.3. Гравитационно-диссипативная желобковая неустойчивость . . . . .	286
14.4. Энергетический принцип . . . . .	286
14.5. Винтовая неустойчивость . . . . .	289
14.6. Тиринг-мода . . . . .	295
14.7. Геодезико-акустическая мода и зональные течения . . . . .	300
<b>Глава 15. Магнитные острова и стохастизация магнитного поля . . . . .</b>	<b>304</b>
15.1. Магнитные острова . . . . .	304
15.2. Стохастическая неустойчивость и диффузия силовых линий магнитного поля . . . . .	308
15.3. Перенос в стохастическом магнитном поле . . . . .	313
<b>Литература . . . . .</b>	<b>316</b>

*Владимир Александрович РОЖАНСКИЙ*

## **ТЕОРИЯ ПЛАЗМЫ**

*Учебное пособие*

### **ГДЕ КУПИТЬ**

#### **ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:**

*Для того чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться  
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

**по России и зарубежью**  
«ЛАНЬ-ТРЕЙД», 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967  
[www.lanpbl.spb.ru/price.htm](http://www.lanpbl.spb.ru/price.htm)

**в Москве и в Московской области**  
«ЛАНЬ-ПРЕСС», 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

**в Краснодаре и в Краснодарском крае**  
«ЛАНЬ-ЮГ», 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

#### **ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:**

*интернет-магазины:*

**Издательство «Лань»:** <http://www.lanbook.com>  
**«Сова»:** <http://www.symplex.ru>; **«Ozon.ru»:** <http://www.ozon.ru>  
**«Библион»:** <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 20.06.10.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 16,80. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; [www.iprps.ru](http://www.iprps.ru)